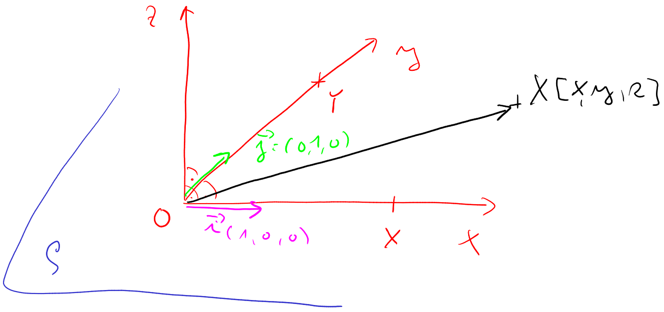
Příklad 7.1

Napište obecnou a parametrickou rovnici roviny OXY (ortogonální soustavy souřadnic).

$X = [x, y, z]$
$O = [0, 0, 0]$
$\vec{i} = (1, 0, 0)$
$\vec{j} = (0, 1, 0)$



$$X = O + t\vec{i} + s\vec{j}$$

$$x = x_0 + t\, x_{\vec{i}} + s\, x_{\vec{j}}$$
$$y = y_0 + t\, y_{\vec{i}} + s\, y_{\vec{j}}$$
$$z = z_0 + t\, z_{\vec{i}} + s\, z_{\vec{j}}$$

Parametrické vyjádření:

$$\rho: \left.\begin{aligned} x &= 0 + t\cdot 1 + s\cdot 0 \\ y &= 0 + t\cdot 0 + s\cdot 1 \\ z &= 0 + t\cdot 0 + s\cdot 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= t \\ y &= s \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Obecná rovnice: $\vec{OX} = X - O = (x, y, z)$

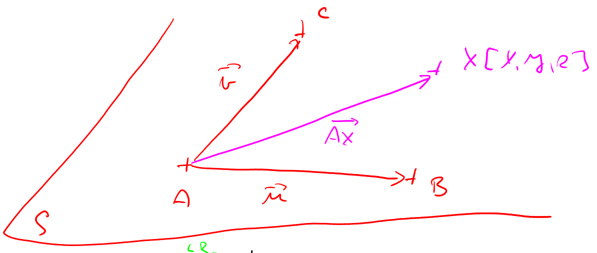
$$[\vec{OX}, \vec{i}, \vec{j}] \overset{LR}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x(0-0) - y(0-0) + z(1-0) = \underline{\underline{z = 0}}$$

ρ: $x = t$
$y = s$
$z = 0$

ρ: $z = 0$

Příklad 7.2

Určete rovinu $\rho(A, B, C)$, $A = [0, -2, 1]$, $B = [0, 4, 0]$, $C = [-1, 3, 5]$.



$$\vec{AB} = B - A = (0, 6, -1) = \vec{u}$$
$$\vec{AC} = C - A = (-1, 5, 4) = \vec{v}$$
$$\vec{AX} = X - A = (x, y+2, z-1)$$

$$[\vec{AX}, \vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ 0 & 6 & -1 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - (y+2) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= x \cdot 29 - (y+2)(-1) + (z-1) \cdot 6 =$$
$$= 29x + y + 6z \quad + 2 - 6 =$$
$$= \underline{\underline{29x + y + 6z - 4 = 0}}$$

$\rho: \quad 29x + 1y + 6z - 4 = 0$

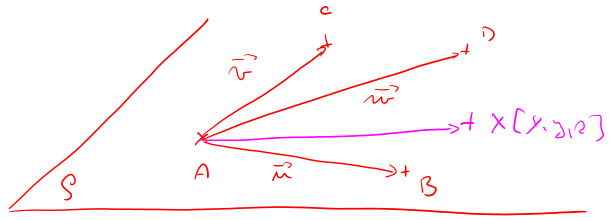
$29x + 1y + 6z = 4 \quad /:4$

$$\rho: \quad \begin{aligned} x &= - s \\ y &= -2 + 6t + 5s \\ z &= 1 - t + 4s \end{aligned}$$

$$\rho: \quad \frac{x}{\frac{4}{29}} + \frac{y}{4} + \frac{z}{\frac{4}{6}} = 1$$

Příklad 7.3

Leží body $A = [0, -3, 2]$, $B = [6, -3, 0]$, $C = [3, 0, 3]$ a $D = [7, 2, 3]$ v jedné rovině? Pokud ano, určete ji.



$\vec{u} = \vec{AB} = (6, 0, -2)$

$\vec{v} = \vec{AC} = (3, 3, 1)$

$\vec{w} = \vec{AD} = (7, 5, 1)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 18 + 0 - 30 + 42 - 0 - 30 = 60 - 60 = \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow$ jsou komplanární

$$\rho: \begin{aligned} x &= + 6t + 3s \\ y &= -3 + 3s \\ z &= 2 - 2t + s \end{aligned}$$

$\vec{AX} = (x, y+3, z-2)$

$$\begin{vmatrix} x & y+3 & z-2 \\ 6 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot 6 - (y+3) \cdot 12 + (z-2) \cdot 18 = 6x - 12y + 18z - 36 - 36 = 0$$

$\rho: 6x - 12y + 18z - 72 = 0$

Příklad 7.4

Je dán kanonický tvar přímky $p: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-7}{3}$. Určete parametrické vyjádření přímky, respektive pomocí průsečnice dvou rovin.

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-7}{3}$$

$A = [3, -1, 7]$

$\vec{s} = (-2, 4, 3)$

$$p: \begin{aligned} x &= 3 - 2t \\ y &= -1 + 4t \\ z &= 7 + 3t \end{aligned}$$

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{4}$$

$4(x-3) = -2(y+1)$

$4x + 2y - 12 + 2 = 0$

$2x + y - 5 = 0$

$$\frac{y+1}{4} = \frac{z-7}{3}$$

$3(y+1) = 4(z-7)$

$3y - 4z + 3 + 28 = 0$

$3y - 4z + 31 = 0$

$$p: \begin{cases} \rho: 2x + y - 5 = 0 \\ \sigma: 3y - 4z + 31 = 0 \end{cases}$$

Příklad 7.5

Určete kanonický tvar přímky dané bodem $A = [2, 1, -3]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (1, -3, 1)$.

$p: X = A + t\vec{s}$ ... param.

$A = [2, 1, -3]$

$\vec{s} = (1, -3, 1)$

$$p: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow t = x - 2$

$\Rightarrow -3t = y - 1$

$\Rightarrow t = z + 3$

$$p: \frac{x - x_A}{s_1} = \frac{y - y_A}{s_2} = \frac{z - z_A}{s_3}$$

$$p: \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{-3} = \frac{z + 3}{1}$$

Příklad 7.6

Určete parametrické vyjádření a kanonický tvar přímky

$$p: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 & \varrho \\ 2x - y - 3z - 2 = 0 & \sigma \end{cases}$$

$\vec{n}_\varrho = (1, 2, 1)$, $\vec{n}_\sigma = (2, -1, -3)$ $\quad \vec{s} = \vec{n}_\varrho \times \vec{n}_\sigma$

$\vec{i} = (1, 0, 0)$
$\vec{j} = (0, 1, 0)$
$\vec{k} = (0, 0, 1)$

$$\vec{s}: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-6+1) - \vec{j}(-3-2) + \vec{k}(-1-4) =$$

$$= (-5, 5, -5) \sim (-1, 1, -1) = \vec{s}$$

DÚ

$x = 0$: $\quad 2y + z - 1 = 0$
$\quad -y - 3z - 2 = 0 \implies y = -2 - 3z \implies \dots \quad z = -1$, $y = -2 + 3 = 1$

$\implies A: [0; 1, -1]$

$$p: \quad \begin{aligned} x &= \quad -t \\ y &= 1 + t \\ z &= -1 - t \end{aligned}$$

$$p: \quad \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

$$\left[\frac{x - x_A}{s_1} = \frac{y - y_A}{s_2} = \frac{z - z_A}{s_3} \right]$$

Příklad 7.7

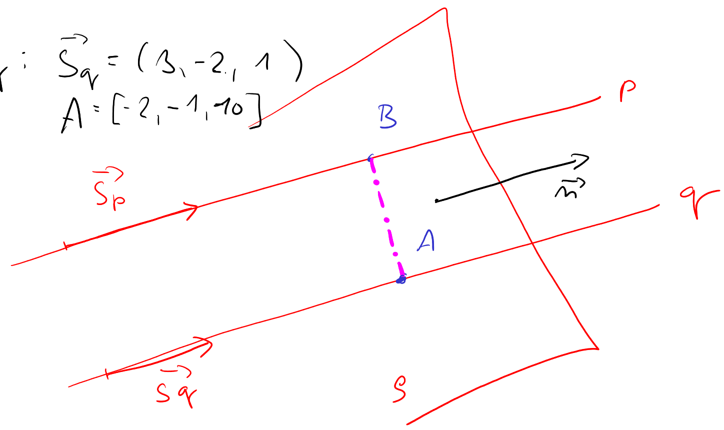
Určete vzdálenost dvou rovnoběžných přímek $p: \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$ a $q: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-10}{1}$.

$p:$ $\vec{n}_\varrho = (1,1,-1)$, $\vec{n}_\sigma = (1,-1,-5)$ $\quad \vec{s}_p = \vec{n}_\varrho \times \vec{n}_\sigma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-6,4,-2) \sim (3,-2,1)$

$q:$ $\vec{s}_q = (3,-2,1)$, $A = [-2,-1,10]$

$\varrho \perp p$ $\quad \vec{n}_\varrho \equiv \vec{s}_q$

$\varrho \perp q$



$\varrho \ni A$; $\vec{n}_\varrho \equiv \vec{s}_q$ $\quad ax+by+cz+d=0$

$$\left.\begin{aligned} \varrho:&\ 3x-2y+z+d=0 \\ A\in\varrho:&\ -6+2+10+d=0 \\ & d=-6 \end{aligned}\right\} \quad \varrho: 3x-2y+z-6=0$$

$$\varrho \cap p: \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \\ 3x-2y+z-6=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right) \cdot(-1) \cdot(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \end{array}\right) \underset{\text{Dú}}{\sim \dots \sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right)$$

$z = -1$

$y + 2(-1) = -4 \Rightarrow y = -2$ $\quad B = [1,-2,-1]$

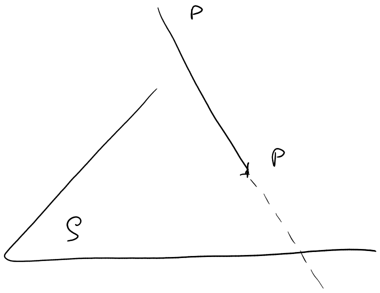
$x + (-2) - (-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

$\vec{AB} = B - A = (1+2, -2+1, -1-10) = (3,-1,-11)$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-11)^2} = \sqrt{9+1+121} = \underline{\underline{\sqrt{131}}}$$

Příklad 7.8

Určete průsečík přímky $p: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ s rovinou $\rho: 3x - 2y + z - 3 = 0$.



$P = p \cap \rho$

$$3(-1+2t) - 2(2+t) + (1-t) - 3 = 0$$
$$-3 + 6t - 4 - 2t + 1 - t - 3 = 0$$
$$3t - 9 = 0$$
$$3t = 9$$
$$t = 3$$

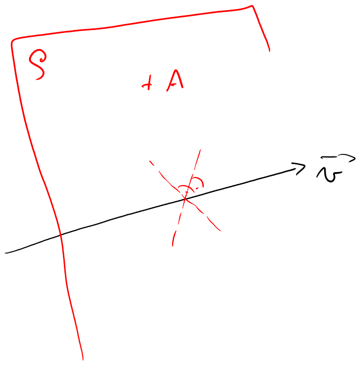
dosadíme t do p:

$$x = -1 + 2 \cdot 3 = 5$$
$$y = 2 + 3 = 5$$
$$z = 1 - 3 = -2$$

$\Rightarrow \underline{\underline{P = [5, 5, -2]}}$

Příklad 7.9

Bodem $A = [2, 1, -1]$ veďte rovinu kolmou k vektoru $\vec{v} = (1, -2, 3)$.



$\vec{v}$ JE KOLMÝ VEKTOR NA ROVINU ρ A TEDY KOLINEÁRNÍ S $\vec{n}_\rho$

VEZMĚME $\vec{n}_\rho = \vec{v} = (1, -2, 3)$

$$\rho: \quad x - 2y + 3z + d = 0$$

$$A \in \rho: \quad 2 - 2 \cdot 1 + 3(-1) + d = 0$$

$$d = 3$$

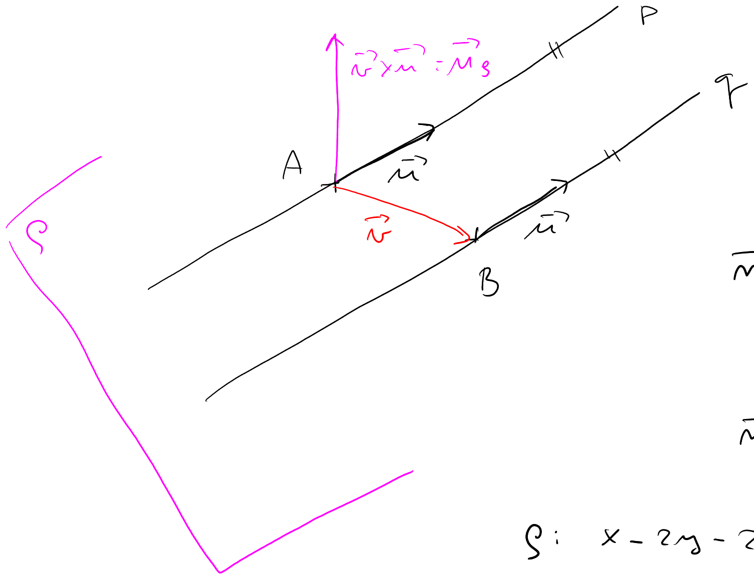
$$\rho: \quad x - 2y + 3z - 3 = 0$$ (OBECNÝ TVAR)

$$x - 2y + 3z = -3 \quad /:-3$$

$$\rho: \quad \frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{3}{2}} + \frac{z}{-1} = 1$$ (ÚSEKOVÝ TVAR)

Příklad 7.10

Určete rovnici roviny, procházející rovnoběžkami $p: \frac{x-4}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ a $q: \frac{z-2}{4} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-5}{1}$.



$\vec{u} = (4, 1, 1)$

$A = [4, -1, 2]$, $B = [2, -5, 5]$

$\vec{v} = \vec{AB} = B - A = (-2, -4, 3)$

$$\vec{n}_\rho \approx \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = (3+4; -(12+2); -16+2) = (7, -14, -14)$$

$\vec{n}_\rho = (1, -2, -2)$

$\rho: \; x - 2y - 2z + d = 0$

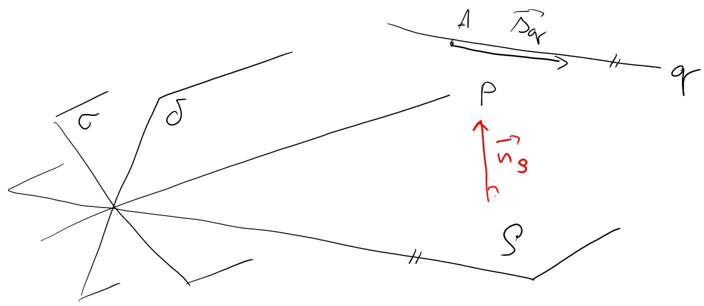
$A \in \rho: \; 4 + 2 - 4 + d = 0$

$d = -2$

$\underline{\underline{\rho: \; x - 2y - 2z - 2 = 0}}$

Příklad 7.11

Určete rovnici roviny ρ, která prochází přímkou $p : \begin{cases} x + 2y + 14 = 0 \\ 3y + z + 21 = 0 \end{cases}$ a je rovnoběžná s přímkou $q : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$. Úlohu řešte svazkem rovin.



$\vec{n_\rho} \cdot \vec{s_q} = 0$

$\vec{s_q} = (2, 1, 2)$

$\rho: \quad \alpha(x + 2y + 14) + \beta(3y + z + 21) = 0$

$\alpha x + 2\alpha y + 14\alpha + 3\beta y + \beta z + 21\beta = 0$

$\alpha x + (2\alpha + 3\beta) y + \beta z + 14\alpha + 21\beta = 0$

$\vec{n_\rho} = (\alpha; 2\alpha + 3\beta, \beta)$

$\vec{n_\rho} \cdot \vec{s_q} = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 2 + (2\alpha + 3\beta) \cdot 1 + \beta 2 = 0$

$4\alpha + 5\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{5}{4}\beta$

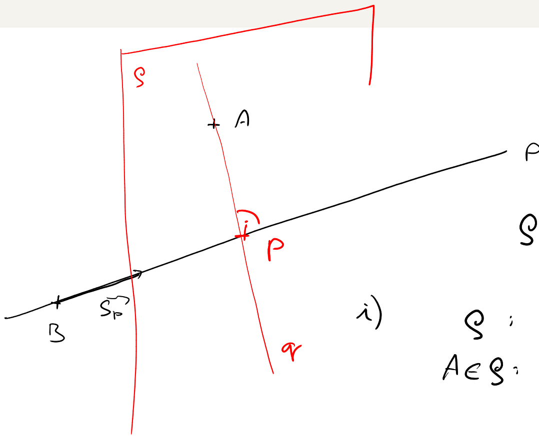
$\beta = -4, \quad \alpha = 5$

$\rho: \quad 5x + (2 \cdot 5 + 3(-4))y + (-4)z + 14 \cdot 5 + 21(-4) = 0$

$$\underline{\underline{5x - 2y - 4z - 14 = 0}}$$

Příklad 7.12

Určete rovnici kolmice z bodu $A = [4, 1, 2]$ na přímku $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1}$.



$$p: \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= -1 + 2t \\ z &= t \end{aligned}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$\vec{s}_p = (1, 2, 1)$

ŘEŠENÍ VIZ.: ŠPAČKOVÁ

$P[x, y, z] \in p$

$\vec{s}_p$

$\vec{AP} = P - A =$

$= (x-4, y-1, z-2)$

$= (1+t-4, -1+2t-1, t-2)$

$\vec{s}_p \cdot \vec{AP} = 1+t-4+2(-1+2t-1)+t-2 = 0$

$6t - 9 = 0$

$\rho \perp p : \vec{n}_\rho = \vec{s}_p = (1, 2, 1)$

i) $\rho : x + 2y + z + d = 0$

$A \in \rho : 4 + 2 \cdot 1 + 2 + d = 0$

$d = -8$

$\rho : x + 2y + z - 8 = 0$

ii) $P = \rho \cap p$

$(1+t) + 2(-1+2t) + t - 8 = 0$

$1 + t - 2 + 4t + t - 8 = 0$

$6t - 9 = 0$

$6t = 9$

$t = \frac{3}{2}$

dosadím $t = \frac{3}{2}$ do param. rce p: $x = 1 + \frac{3}{2}$, $y = -1 + 2\,\frac{3}{2}$, $z = \frac{3}{2}$

$P = \left[\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}\right]$

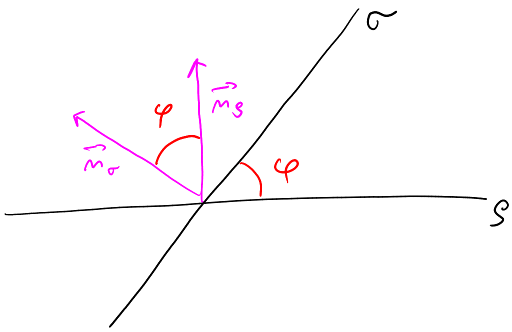
iii) $\vec{s}_q = \vec{AP} = \left(\frac{5}{2} - 4, 2 - 1, \frac{3}{2} - 2\right) = \left(-\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$

$$q(A, \vec{s}_q) : \begin{aligned} x &= 4 - \tfrac{3}{2}s \\ y &= 1 + s \\ z &= 2 - \tfrac{1}{2}s \end{aligned}; \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{x-4}{-\frac{3}{2}} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-\frac{1}{2}} \right)$$

Příklad 7.13

Určete úhel mezi rovinami $\rho : 3x + y - 4z - 11 = 0$ a $\sigma : 2x - 2y + z + 4 = 0$.



$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{n}_\sigma|}{\|\vec{n}_\rho\| \cdot \|\vec{n}_\sigma\|}$$

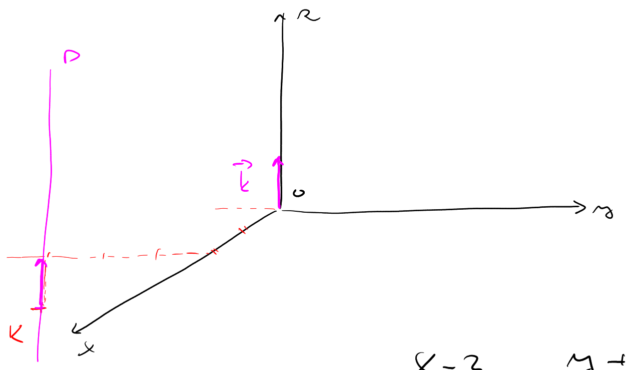
$$\vec{n}_\rho = (3, 1, -4)$$
$$\vec{n}_\sigma = (2, -2, 1)$$

$$\cos\varphi = \frac{|(3,1,-4)\cdot(2,-2,1)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|6 - 2 - 4|}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{9}} = 0$$

$$\varphi = \arccos 0 \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = \frac{\pi}{2}}} \quad \left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

Příklad 7.14

Napište rovnici přímky v kanonickém tvaru, která prochází bodem $K = [2, -3, -1]$ a je rovnoběžná se souřadnicovou osou z.



$\vec{s}_p = \vec{k} = (0, 0, 1)$

$$p: \frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{0} = \frac{z+1}{1}.$$

$$p: \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -3 \\ z &= -1 + t \end{aligned} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ

Příklad 7.15

Určete λ tak, aby roviny $\rho : x + 2y + 3z - 7 = 0$ a $\sigma : 3x + \lambda y + 2z - 5 = 0$ byly na sebe kolmé.

$$\rho: \ x + 2y + 3z - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_\rho = (1, 2, 3)$$

$$\sigma: \ 3x + \lambda y + 2z - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_\sigma = (3, \lambda, 2)$$

$$\vec{n}_\rho \cdot \vec{n}_\sigma = (1, 2, 3) \cdot (3, \lambda, 2) = 0$$

$$3 + 2\lambda + 6 = 0$$

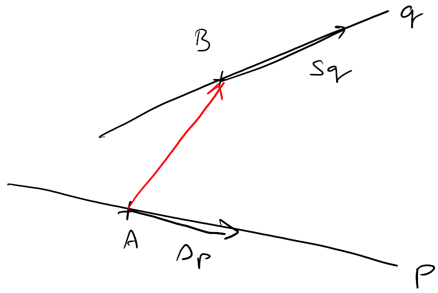
$$2\lambda = -9$$

$$\underline{\underline{\lambda = -\frac{9}{2}}}$$

Příklad 7.16

Vyšetřete vzájemnou polohu přímek

$$p:\begin{cases} x = 5+2t \\ y = -1-t \\ z = t \end{cases} \quad \text{a} \quad q: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{4}.$$



p: $A=[5,-1,0]$, $\vec{s}_p=(2,-1,1)$

q: $B=[-2,3,-1]$, $\vec{s}_q=(3,1,4)$

$$\vec{s}_p \times \vec{s}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-4-1\,;\,-(8-3)\,;\,2+3) = (-5,-5,5) \sim (1,1,-1) \neq \vec{o}$$

$\Rightarrow$ VEKTORY NEJSOU KOLINEÁRNÍ

$\Rightarrow$ JSOU BUĎ X ; X

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-7, 4, -1)$

Dú

$$[\overrightarrow{AB}, \vec{s}_p, \vec{s}_q] = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \dots = 10 \neq 0$$

$\Rightarrow$ nejsou komplanární

$\Rightarrow$ jsou mimoběžné