FACULTY OF CIVIL ENGINEERING institute of mathematics and descriptive geometry

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

9. Polynom a racionální funkce

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

[1] Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2008. ISBN: 978-80-7204-982-0

William George Horner

Definice

Funkci

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ nazýváme **reálný polynom stupně** n, $n \in \mathbb{N}_0$.

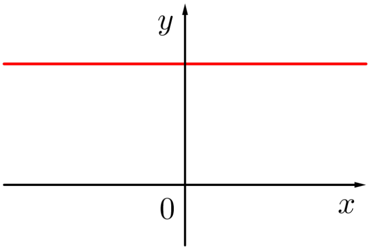
- Čísla $a_0, \ldots, a_n$ nazýváme **koeficienty** polynomu P.
- Koeficient a_n nazýváme **vedoucí koeficient**
- Koeficient a_0 nazýváme **absolutní člen**.
- Je-li $a_n = 1$, říkáme, že polynom P je **normovaný**.

Poznámka:

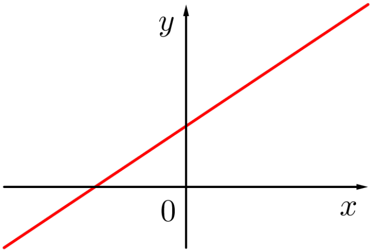
Polynom stupně

- 0 je konstantní funkce, např. $P_0(x) = -2$
- 1 je lineární funkce, např. $P_1(x) = 3x + 1$
- 2 je kvadratická funkce funkce, např. $P_2(x) = 2x^2 - 6x + 5$

Graf polynomu

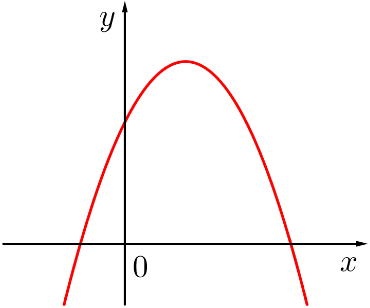


$n = 0$

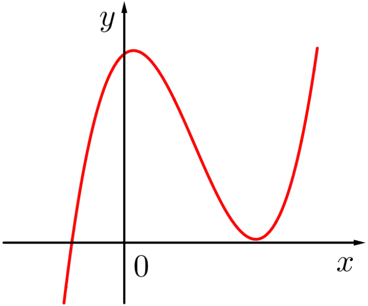


$n = 1$

Graf polynomu

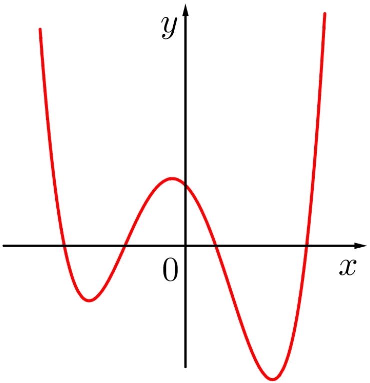


$n = 2$

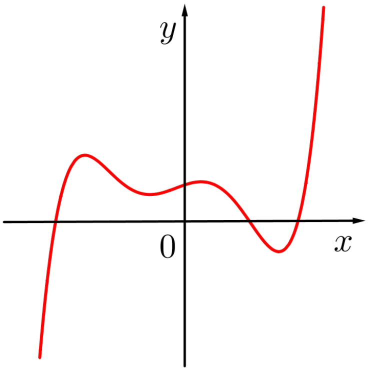


$n = 3$

Graf polynomu



$n = 4$



$n = 5$

Operace s polynomy

$$f : y = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad g : y = Q_m(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l$$

Sčítání, odčítání polynomů

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \pm b_k) x^k \text{ pro } n \geq m$$

sčítáme koeficienty u odpovídajících si mocnin

Násobení polynomu konstatntou

$$r f(x) = \sum_{k=0}^{n} r a_k x^k \text{ pro } r \in \mathbb{R}$$

Operace s polynomy

$$f : y = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad g : y = Q_m(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l$$

Násobení polynomů

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k, \text{ kde } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

násobíme postupně každý sčítanec prvního polynomu všemi sčítanci druhého polynomu.

Zřejmě platí:

$$\operatorname{st}(f+g) \leq \max(\operatorname{st} f, \operatorname{st} g),$$
$$\operatorname{st}(f \cdot g) = \operatorname{st} f + \operatorname{st} g.$$

$$f : y = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad g : y = Q_m(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l$$

Dělení polynomů

Jsou-li P_n, Q_m polynomy stupňů $n \geq m > 0$, pak existují právě dva polynomy H_{n-m}, R_j (stupňů $n - m, j < m$) pro které platí

$$P_n = Q_m \cdot H_{n-m} + R_j, \text{ tj.}$$

$$\frac{P_n}{Q_m} = H_{n-m} + \frac{R_j}{Q_m}, \text{pokud } Q_m(x) \neq 0$$

Q_m – dělitel
H_{n-m} – podílový polynom
R_j – zbytek
$R_j = 0$ – říkáme, že polynom P_n je dělitelný polynomem Q_m

Příklad 9.1

Jsou dány polynomy $f : P_3(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 1$ a $g : Q_1(x) = 3x - 2$. Vypočtěte $f(x) + g(x)$ a $f(x) \cdot g(x)$.

Příklad 9.2

Jsou dány polynomy $f : P_4(x) = 6x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 8x - 5$ a $g : Q_2(x) = 2x^2 - x + 1$. Vypočtěte $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Rovnost polynomů

Rovnost polynomů

Je-li

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

pak $P_n = Q_m$, jestliže $n = m$ a $a_i = b_i$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$, tj. koeficienty u stejných mocnin jsou si rovny.

Definice

Je-li P_n polynom stupně $n, n > 0$, pak číslo $x_0 \in \mathbb{R}$ (případně $x_0 \in \mathbb{C}$) nazveme **kořenem** (nebo též nulovým bodem), je-li splněno $P_n(x_0) = 0$. Výraz $x - x_0$ nazýváme **kořenovým činitelem**.

Číslo x_0 nazveme $k-$**násobným kořenem** polynomu P_n stupně $n > 0$, jestliže platí $P_n(x) = (x - x_0)^k \cdot Q_{n-k}(x)$, přičemž $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$.

Kořenové vlastnosti polynomů

- V oboru $\mathbb{C}$ má každý polynom $n-$tého stupně právě n kořenů (přičemž každý kořen je počítán tolikrát, jaká je jeho násobnost) a platí $P_n(x) = a_n(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$. Jde o tzv. **rozklad polynomu na součin kořenových činitelů**.
- S každým $k-$násobným kořenem $a+ib$ má polynom také $k-$násobný kořen $a-ib$.
- Polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.
- Má-li polynom P_n *celočíselné* koeficienty $a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, \ldots, n$, a je-li *celé číslo* p kořenem polynomu P_n, pak p dělí koeficient a_0.
- $P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}\cdot((x-a_1)^2+b_1^2)^{l_1}\cdot\ldots\cdot((x-a_s)^2+b_s^2)^{l_s}$, kde polynom P_n má reálné kořeny $x_1, \ldots, x_r$ násobností $k_1, \ldots, k_r$, komplexní kořeny $a_1 \pm b_1 i, \ldots, a_s \pm b_s i$ násobností $l_1, \ldots, l_s$, přičemž $k_1 + \cdots + k_r + 2l_1 + \cdots + 2l_s = n$. Jde o tzv. rozklad v *reálném oboru*.

Příklad 9.3

Je dán polynom $f : P_{100}(x) = 85x^{100} + \cdots + 3x - 12$ s celočíselnými koeficienty. Určete všechna celá čísla, která mohou teoreticky být kořenem daného polynomu $P_{100}(x)$.

Hornerovo schéma

Dělíme-li polynom P_n polynomem $x - c$, pak platí $P_n(x) = (x - c)H_{n-1}(x) + d$, příčemž pro koeficienty polynomu $H_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ platí schéma

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
$x = c$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	b_0	$d = P_n(c)$

kde

$$
\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n, & &\vdots\\
b_{n-2} &= c \cdot b_{n-1} + a_{n-1}, & b_0 &= c \cdot b_1 + a_1,\\
b_{n-3} &= c \cdot b_{n-2} + a_{n-2}, & d &= c \cdot b_0 + a_0.\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Je-li $d = 0$, pak c je kořen polynomu $P_n(x)$

Ačkoli byl algoritmus pojmenován po *Williamu Georgi Hornerovi* (1786 – 1837), který ho poprvé popsal v roce 1819, byl znám již *Isaacu Newtonovi* (1669) a dokonce již ve 13. století čínskému matematikovi *Ch'in Chiu-Shao*.

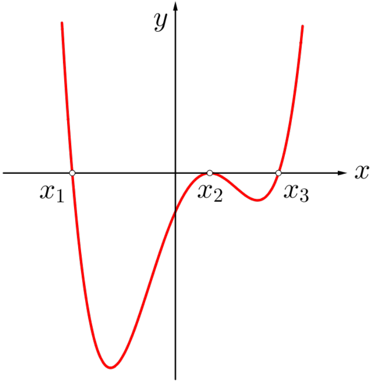
Příklad 9.4

Určete rozklad polynomu (v reálném oboru)

$$P_5(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2.$$

Znaménko polynomu

Na změnu znaménka polynomu mají vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti.



$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3)^3$$

Reálné kořeny polynomu jsou průsečíky grafu tohoto polynomu s osou x.

- Kořen liché násobnosti – polynom mění znaménko v tomto bodě.
- Kořen sudé násobnosti – polynom nemění znaménko v tomto bodě.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- Doplnění na čtverec:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

Příklad 9.5

Určete znaménko polynomu

$$f(x) = x^3(x-2)^5(x+4)(x-5)^4(x+1)^2(x^2+9).$$

Definice

Nechť P_n a Q_m jsou polynomy stupně n a m. Funkci tvaru

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

nazýváme **racionální lomená funkce**. Navíc funkce $R(x)$ je

- **ryze lomená**, jestliže $n < m$,
- **neryze lomená**, jestliže $n \geq m$.

Věta

Každou neryze lomenou funkci je možné (pomocí dělení polynomů) vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce, tedy

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)},$$

kde S_{n-m} a T_k jsou polynomy stupně $(n-m)$ a k a platí $k < m$.

Věta

Každou ryzí racionální funkci $\frac{P_n}{Q_m}$ *lze rozložit na součet parciálních zlomků.*

- *V rozkladu polynomu* Q_m *se vyskytuje polynom* $(x - x_0)^k$*, pak mu v rozkladu racionální funkce* $\frac{P_n}{Q_m}$ *odpovídá součet* k *parciálních zlomků tvaru*

$$\frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - x_0)^k}.$$

- *V rozkladu polynomu* Q_m *se vyskytuje polynom* $(ax^2 + bx + c)^l$*, kde* $a \neq 0$*, diskriminant* $D < 0$*, pak mu v rozkladu odpovídá součet* l *parciálních zlomků tvaru*

$$\frac{B_1 x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2 x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_l x + C_l}{(ax^2 + bx + c)^l}.$$

Mějme rovnici, kde levá strana je racionální lomená funkce $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ a pravá strana je její rozklad na parciální zlomky s koeficienty $A_1, \ldots, A_m$. Vynásobíme rovnici výrazem $Q_m(x)$, čímž se zbavíme zlomků. Používají se 3 postupy na určení koeficientů $A_1, \ldots, A_m$:

(i) **Univerzální postup.** Je vhodný a jediný, pokud všechny kořeny $Q_m(x)$ jsou komplexní. Roznásobíme a sečteme výrazy ve vzniklé rovnici. Porovnáme koeficienty u stejných mocnin na obou stranách rovnice, čímž dostaneme soustavu m rovnic o m neznámých. Jejím vyřešením získáme hodnoty $A_1, \ldots, A_m$.

(ii) **Dosazovací metoda**. Dá se použít pouze tehdy, když všechny kořeny $Q_m(x)$ jsou jednoduché reálné. Dosazujeme do vzniklé rovnice postupně všechny kořeny polynomu $Q_m(x)$, čímž okamžitě získáváme hodnoty A_1, ..., A_m.

(iii) **Kombinovaná metoda**. Spočívá v kombinaci předešlých postupů a je vhodná ve většině případů, kdy kořeny polynomu $Q_m(x)$ jsou jak komplexní, tak reálné či pouze reálné násobné.

Znaménko racionální funkce

Na změnu znaménka racionální funkce $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde polynomy P_n, Q_m nemají společné kořeny, mají vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti čitatele a jmenovatele. Kořeny jmenovatele ovšem nejsou v definičním oboru funkce f.

Příklad 9.6

Určete znaménko racionální funkce

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-5)^2(2x^2+1)}{x^4(x-1)^3}.$$

Příklad 9.7

Napište obecný tvar rozkladu racionální funkce

$$f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)(x-3)^3(x^2+x+1)(x^2+1)^2}.$$

Příklad 9.8

Určete rozklad racionální funkce na parciální zlomky

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x-6}$,

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^4+x^3+x^2+x}$.

Děkuji za pozornost!