Příklad 9.1

Jsou dány polynomy $f : P_3(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 1$ a $g : Q_1(x) = 3x - 2$. Vypočtěte $f(x) + g(x)$ a $f(x) \cdot g(x)$.

$$f(x) + g(x) = (2x^3 - 5x^2 - 3x + 1) + (3x - 2) = \underline{\underline{2x^3 - 5x^2 - 1}}$$

$$f(x) \cdot g(x) = (2x^3 - 5x^2 - 3x + 1) \cdot (3x - 2) =$$

$$= 6x^4 - 4x^3 - 15x^3 + 10x^2 - 9x^2 + 6x + 3x - 2 =$$

$$= \underline{\underline{6x^4 - 19x^3 + x^2 + 9x - 2}}$$

Příklad 9.2

Jsou dány polynomy $f : P_4(x) = 6x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 8x - 5$ a $g : Q_2(x) = 2x^2 - x + 1$. Vypočtěte $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$$(6x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 8x - 5) : (2x^2 - x + 1) = 3x^2 + 5x - 2 = H_{4-m} = H_2$$

$$\begin{array}{l}
-\,6x^4 \pm 3x^3 \mp 3x^2 \\
\hline
\quad 10x^3 - 9x^2 + 8x - 5 \\
\quad -\,10x^3 \pm 5x^2 \mp 5x \\
\hline
\qquad -4x^2 + 3x - 5 \\
\qquad \pm 4x^2 \mp 2x \pm 2 \\
\hline
\qquad\qquad x - 3
\end{array} = R_j = R_1$$

$$(6x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 8x - 5) : (2x^2 - x + 1) = 3x^2 + 5x - 2 + \frac{x - 3}{2x^2 - x + 1}$$

Příklad 9.3

Je dán polynom $f : P_{100}(x) = 85x^{100} + \cdots + 3x - 12$ s celočíselnými koeficienty. Určete všechna celá čísla, která mohou teoreticky být kořenem daného polynomu $P_{100}(x)$.

$$P_{100}(x) = 85x^{100} + \cdots + 3x - 12$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$$

Příklad 9.4

Určete rozklad polynomu (v reálném oboru)

$$P_5(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2.$$

MOŽNÉ CELOČÍSELNÉ KOŘENY: $\pm 1, \pm 2$

	2	1	-5	1	-1	2	
$x = 1$	2	3	-2	-1	-2	0	je kořen
1	2	5	3	2	0		je kořen
~~1~~	~~2~~	~~7~~	~~10~~	~~12 ≠ 0~~			není kořen
~~-1~~	~~2~~	~~3~~	~~0~~	~~2 ≠ 0~~			není kořen
~~2~~	~~2~~	~~9~~	~~21~~	~~44 ≠ 0~~			není kořen
-2	2	1	1	0			je kořen
× -2	2	-3	7 ≠ 0				není kořen

$P_5(x) = (x-1)\cdot(2x^4+3x^3-2x^2-x-2)$

$P_5(x) = (x-1)^2\cdot(2x^3+5x^2+3x+2)$

$P_5(x) = (x-1)^2\cdot(x+2)\cdot(2x^2+x+1)$

$\Downarrow$

$D = 1^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = -7 < 0$

$$P_5(x) = (x-1)^2(x+2)\cdot(2x^2+x+1)$$

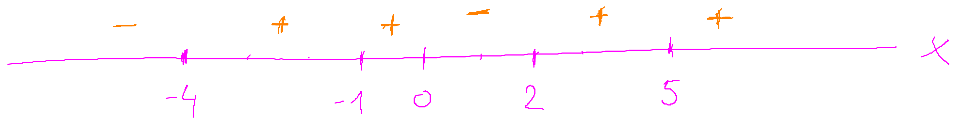
Příklad 9.5

Určete znaménko polynomu

$$f(x) = x^3(x-2)^5(x+4)(x-5)^4.(x+1)^2(x^2+9).$$

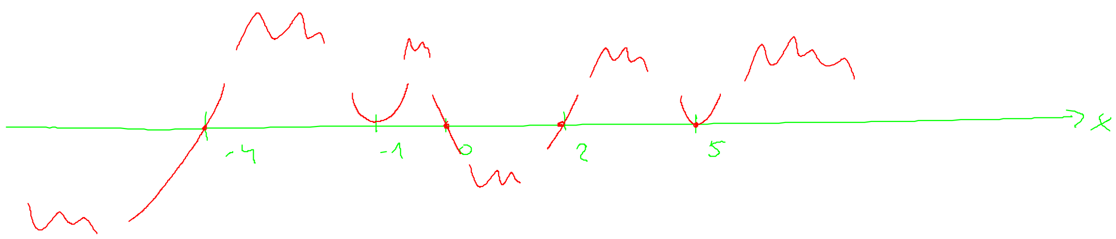
0, 2, −4, 5, −1

L L L S S



$$f(1) = 1^3 \cdot (-1)^5 \cdot 5 \cdot (-4)^4 \cdot 2^2 \cdot 10 < 0$$

$+ \quad - \quad + \quad + \quad + \quad +$



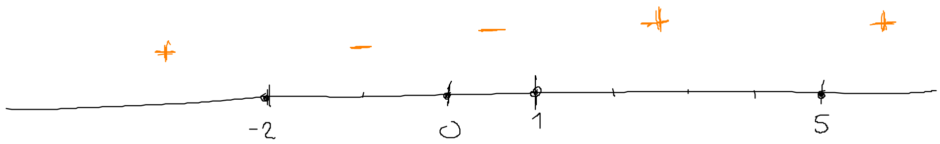
Příklad 9.6

Určete znaménko racionální funkce

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-5)^2(2x^2+1)}{x^4(x-1)^3}.$$

$-2,\ 5,\ 0,\ 1$

L S S L



$$f(2) = \frac{4\cdot(-3)^2\, 9}{2^4\, 1^3} \quad \left| \frac{+\ +\ +}{+\ +} \right| > 0$$

Příklad 9.7

Napište obecný tvar rozkladu racionální funkce

$$f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)(x-3)^3(x^2+x+1)(x^2+1)^2}. \quad = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$st(P_n(x)) = 1$ $\quad 1 < 10 \Rightarrow f(x)$ JE RYZÍ RAC. LOM. FCE

$st(Q_m(x)) = 10$

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1} + \frac{Gx+H}{x^2+1} + \frac{Ix+J}{(x^2+1)^2}$$

Příklad 9.8

Určete rozklad racionální funkce na parciální zlomky

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x-6}$,

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^4+x^3+x^2+x}$.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x-6} = 1 + \dfrac{7-x}{x^2+x-6}$

① st P = 2, st Q = 2 → NENÍ RYZÍ

$$\begin{array}{l} (x^2 \quad +1):(x^2+x-6) = 1 \\ -x^2 - x + 6 \\ \hline \quad -x+7 \end{array}$$

② $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$

$$\frac{7-x}{x^2+x-6} = \frac{7-x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

③ $\dfrac{7-x}{x^2+x-6} = \dfrac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$

$$7-x = Ax+3A+Bx-2B$$

i) UNIVERZÁLNÍ (METODA NEURČITÝCH KOEFICIENTŮ)

$x^1: \; -1 = A+B \quad /\cdot 2 \Rightarrow 5 = 5A \Rightarrow A = 1$

$x^0: \; 7 = 3A-2B \qquad \Rightarrow B = -1-A, \; B = -2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} B = -2 \\ A = 1 \end{array}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+3}$$

ii) DOSAZOVACÍ

$x = 2 \to 5 = 5A \Rightarrow A = 1$

$x = -3 \to 10 = -5B \Rightarrow B = -2$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+3}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^4+x^3+x^2+x}$

$\text{st}\, P = 0, \ \text{st}\, Q = 4 \qquad 0 < 4 \Rightarrow$ je ryzí

$$x^4+x^3+x^2+x = x\left(x^3+x^2+x+1\right) = x\left(x^2(x+1)+(x+1)\right) =$$
$$= x\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+1\right)$$

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$1 = A\underbrace{(x+1)(x^2+1)}_{(x^3+x^2+x+1)} + Bx\underbrace{(x^2+1)}_{(x^3+x)} + (Cx+D)\underbrace{x(x+1)}_{x^2+x}$$

$$1 = Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^3 + Bx + Cx^3 + Cx^2 + Dx^2 + Dx$$

$$\begin{array}{llcl}
x^3 \to & 0 & = & A + B + C \\
x^2 \to & 0 & = & A \phantom{{}+B} + C + D \\
x^1 \to & 0 & = & A + B \phantom{{}+C} + D \\
x^0 \to & 1 & = & A \qquad\qquad \Rightarrow A = 1
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots$$

DÚ

$A = 1$

$B = -\frac{1}{2}$

$C = B = -\frac{1}{2}$

$D = C = B = -\frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}$$