

BAA008 Matematika I
pro obor Geodézie a kartografie
10. Posloupnost a její limita,
limita a spojitost funkce

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

- [1] Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2008. ISBN: 978-80-7204-982-0



Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

Posloupnost reálných čísel

Definice

Posloupnost reálných čísel je funkce

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

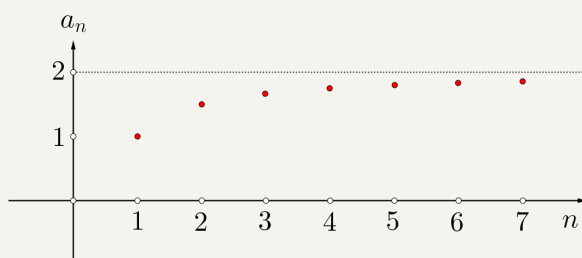
též píšeme

$$f : n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N},$$

jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ přirozených čísel a oborem hodnot je podmnožina reálných čísel $\mathbb{R}$. Funkční hodnotu $f(n)$ značíme a_n a nazýváme ji **n -tým členem posloupnosti**.

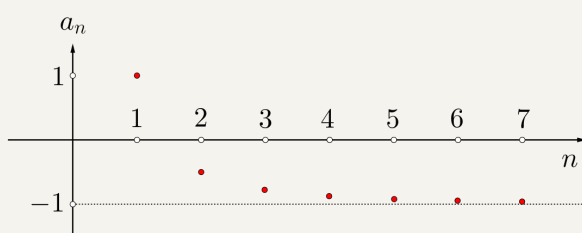
Posloupnost značíme symbolem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, zkráceně $(a_n)_1^{\infty}$ nebo jen (a_n) , $n \in \mathbb{N}$. Lze ji též zapsat v rozepsaném tvaru $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

1. (a_n) je **shora ohraničená** – existuje číslo $h \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq h$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



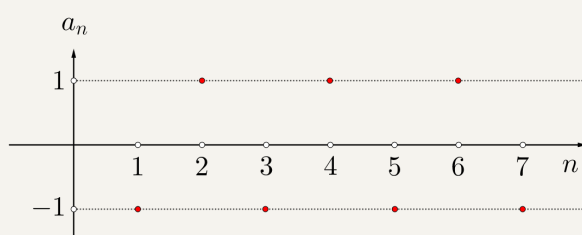
$$a_n = \frac{2n-1}{n}$$

2. (a_n) je **zdola ohraničená** – existuje číslo $d \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \geq d$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



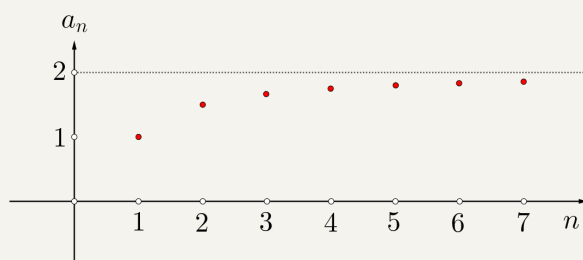
$$a_n = \frac{2-n^2}{n^2}$$

3. (a_n) je **ohraničená** – existují čísla $h, d \in \mathbb{R}$ takové, že $d \leq a_n \leq h$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



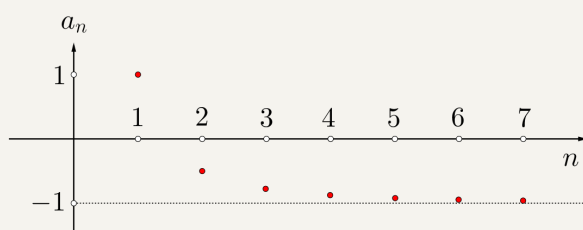
$$a_n = \cos \pi n$$

4. (a_n) je **rostoucí** – platí $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



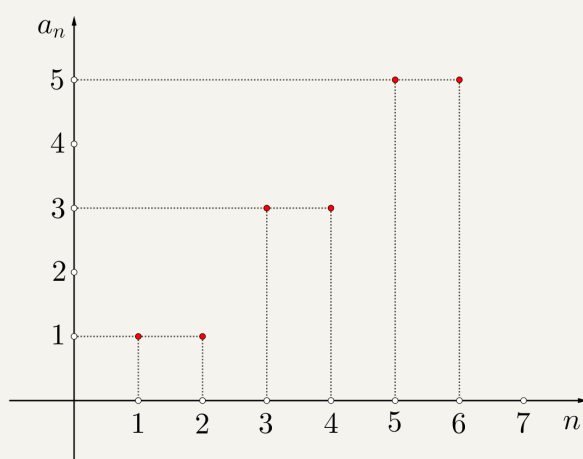
$$a_n = \frac{2n-1}{n}$$

5. (a_n) je **klesající** – platí $a_n > a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



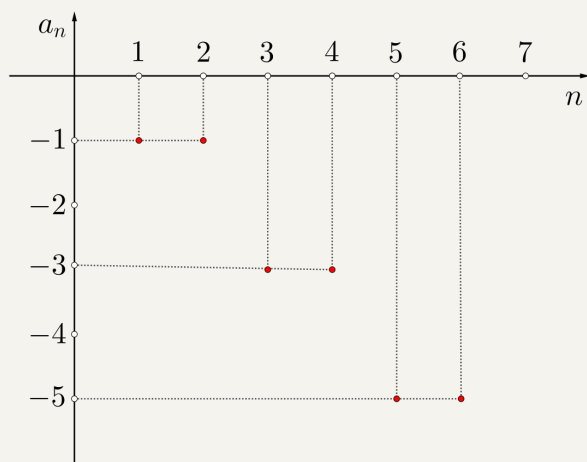
$$a_n = \frac{2-n^2}{n^2}$$

6. (a_n) je **neklesající** – platí $a_n \leq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



$$a_n = n - \frac{1+(-1)^n}{2}$$

7. (a_n) je **nerostoucí** – platí $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.



$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} - n$$

8. (a_n) je **monotónní** – (a_n) je nerostoucí nebo neklesající.

9. (a_n) je **ryze monotónní** – (a_n) je rostoucí nebo klesající.

10. (a_n) je **stacionární** – $a_n = a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n = (-1)^{2n+4}$$

11. (a_n) je **aritmetická** – $a_n = a_1 + (n - 1)d, d \in \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, d difference.

$$a_n = 5n - 2$$

12. (a_n) je **geometrická** – $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, q \in \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, q kvocient.

$$a_n = \frac{3^{n-1}}{5^{2n}}$$

Definice

Posloupnost (a_n) **má limitu** $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.

Posloupnost (a_n) **má limitu** ∞ (**resp.** $-\infty$), jestliže ke každému $h \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n > h$ (**resp.** $a_n < h$).
Posloupnost, která:

- má vlastní limitu, se nazývá **konvergentní**,
- má nevlastní limitu, se nazývá **divergentní**,
- limitu nemá, se nazývá **oscilující**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}; \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > h, \text{ resp. } a_n < h$$

Definice

Je-li (a_n) posloupnost a (k_n) je rostoucí posloupnost přirozených čísel (indexů), pak posloupnost (a_{k_n}) se nazývá **vybraná posloupnost** z posloupnosti (a_n) .

Základní vlastnosti limit posloupností

1. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
2. Je-li $\lim a_n = a$, pak pro každou vybranou posloupnost (a_{k_n}) z posloupnosti (a_n) platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a$.
3. Monotónní posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je ohraničená.
4. Je-li $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > k_0 \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$, pak také $a \leq b$.
5. Změníme-li v posloupnosti konečný počet členů, pak se její limita nezmění.
6. Je-li (b_n) ohraničená posloupnost a $\lim a_n = 0$, pak $\lim a_n b_n = 0$.
7. Je-li $a_n > 0$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim a_n = 0 \iff \lim \frac{1}{a_n} = \infty$

Algebra limit posloupností

Je-li $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, přičemž $a, b \in \mathbb{R}^*$, pak platí

1. $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$,
2. $\lim a_n \cdot b_n = a \cdot b$,
3. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$,
4. $\lim |a_n| = |a|$,

pokud mají výrazy na pravých stranách smysl.

Definované operace

Mezi **definované operace** pro reálná čísla $k \in \mathbb{R}$ a nevlastní čísla ∞ a $-\infty$ patří:

- $\infty + \infty = \infty, -\infty - \infty = -\infty,$
- $k \pm \infty = \pm\infty + k = \pm\infty,$
- $\infty \cdot \infty = \infty, \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty, (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty, -(-\infty) = \infty,$
- $k \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot k = \pm\infty$ pro $k > 0,$
 $k \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot k = \mp\infty$ pro $k < 0,$
- $\frac{k}{\pm\infty} = 0,$
- $k^\infty = 0$ pro $0 < k < 1,$
 $k^\infty = \infty$ pro $k > 1,$
 $\infty^\infty = \infty.$

Neurčité výrazy

Naopak **nejdou definovány** (tzv. neurčité) výrazy:

- $\infty - \infty, -\infty + \infty,$
- $0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty),$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\pm\infty}{\mp\infty},$
- $\frac{k}{0}, \frac{\pm\infty}{0},$
- $(\pm\infty)^0, 0^0,$
- $1^\infty, k^\infty$ pro $k < 0.$

Tyto **neurčité výrazy** budeme spolu s výrazy obsahující prvky ∞ a $-\infty$ a výrazem $\frac{a}{0}$ zapisovat do $\parallel \parallel$.

Příklad 10.1

Vypočítejte limity posloupností

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (-1)^n}{2},$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 123n - 1000}{2n^2 + n},$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^2 - 3n),$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{100n + 2},$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1}(\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}).$

Příklad 10.2

Příklady posloupností, pro něž

$$\lim a_n = \lim b_n = \infty, \text{ ale } \lim(a_n - b_n) \text{ je:}$$

- a) ∞ : $a_n = n^2, b_n = n,$
- b) $-\infty$: $a_n = n, b_n = n^3,$
- c) a : $a_n = n + 5, b_n = n + 1,$
 $a_n = n^2 + \cos \frac{1}{n}, b_n = n^2.$

Příklad 10.3

Příklady posloupností, pro něž

$\lim a_n = 0, \lim b_n = \infty$, ale $\lim(a_n \cdot b_n)$ je:

- a) ∞ : $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n^2$,
- b) 0 : $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = n$,
- c) a : $a_n = \frac{1}{n}, b_n = 2n$,
- d) $\nexists$: $a_n = \frac{\sin n}{n^2}, b_n = n^2$.

- **Prstencové (ryzí) δ –okolí bodu x_0 :** $\mathcal{P}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$,
- **Pravé prstencové δ –okolí bodu x_0 :** $\mathcal{P}^+(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta)$,
- **Levé prstencové δ –okolí bodu x_0 :** $\mathcal{P}^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$,
 $x \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$,
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} = (-\infty, \infty)$.

Definice (Heineho definice limity)

Řekneme, že funkce $f : y = f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu rovnou číslu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže

1. funkce f je definovaná v nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$,
2. pro každou posloupnost $(x_n) \subset \mathcal{P}(x_0)$ s vlastností $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Pak píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Použité pojmy

Limitu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

nazýváme

- **vlastní limita ve vlastním bodě**, jestliže $x_0 \in \mathbb{R}$ a $L \in \mathbb{R}$.
- **nevlastní limita ve vlastním bodě**, jestliže $x_0 \in \mathbb{R}$ a $L = \pm\infty$.
- **vlastní limita v nevlastním bodě**, jestliže $x_0 = \pm\infty$ a $L \in \mathbb{R}$.
- **nevlastní limita v nevlastním bodě**, jestliže $x_0 = \pm\infty$ a $L = \pm\infty$.

Definice (Cauchyho definice limity)

Funkce $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu rovnou číslu $L \in \mathbb{R}$, když pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0)$ splňující podmínku $0 < |x - x_0| < \delta$ platí nerovnost $|f(x) - L| < \varepsilon$. Pak píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Definice (Jednostranná limita)

Číslo $L \in \mathbb{R}^*$ se nazývá **limitou zprava** funkce $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, jestliže

1. funkce f je definovaná v nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}^+(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$,
2. pro každou posloupnost $(x_n) \subset \mathcal{P}^+(x_0), (x_n) \rightarrow x_0$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Pak píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L = f(x_0^+).$$

Definice (Jednostranná limita)

Číslo $L \in \mathbb{R}^*$ se nazývá **limitou zleva** funkce $f : y = f(x)$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, jestliže

1. funkce f je definovaná v nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}^-(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$,
2. pro každou posloupnost $(x_n) \subset \mathcal{P}^-(x_0)$, $(x_n) \rightarrow x_0$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Pak píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L = f(x_0^-).$$

Věta (Existence limity)

Funkce f má ve vlastním bodě x_0 limitu $L \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v tomto bodě obě jednostranné limity a ty jsou si rovny, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

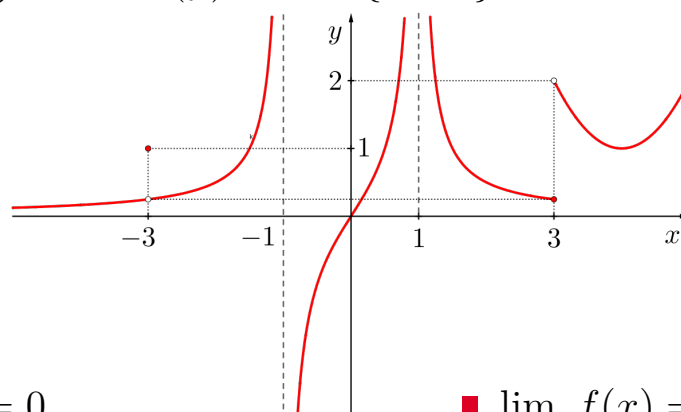
Poznámka

Limita neexistuje, jestliže

- neexistuje některá (nebo obě) jednostranné limity,
- jednostranné limity jsou různé.

Toho lze výhodně využít při důkazu neexistence limity.

Funkce f zadaná grafem, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$



■ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

■ $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{1}{4}$

■ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ neexistuje, neboť
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty,$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

■ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$

■ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ neexistuje, neboť
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{1}{4},$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$

■ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Spojitosť funkce

- δ -okolí bodu x_0 : $\mathcal{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$
- Pravé δ -okolí bodu x_0 : $\mathcal{U}^+(x_0, \delta) = \langle x_0, x_0 + \delta \rangle,$
- Levé δ -okolí bodu x_0 : $\mathcal{U}^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 \rangle,$
 $x \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,$

Definice

Funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

- a) f je definovaná v nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0),$
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$

Definice

Funkce f je **spojitá zprava v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

- a) f je definovaná v pravém okolí $\mathcal{U}^+(x_0)$,
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Definice

Funkce f je **spojitá zleva v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

- a) f je definovaná v levém okolí $\mathcal{U}^-(x_0)$,
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Definice

Funkce f je **spojitá na otevřeném intervalu** $(a, b) \subseteq D(f)$, je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Funkce f je **spojitá na uzavřeném intervalu** $\langle a, b \rangle \subseteq D(f)$, je-li spojitá v intervalu (a, b) a současně je spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b .

Definice (Body nespojitosti)

Bod x_0 , ve kterém není funkce f spojitá, nazýváme **bodem nespojitosti**. Máme tyto druhy nespojitosti v bodě x_0 :

■ Nespojitost prvního druhu

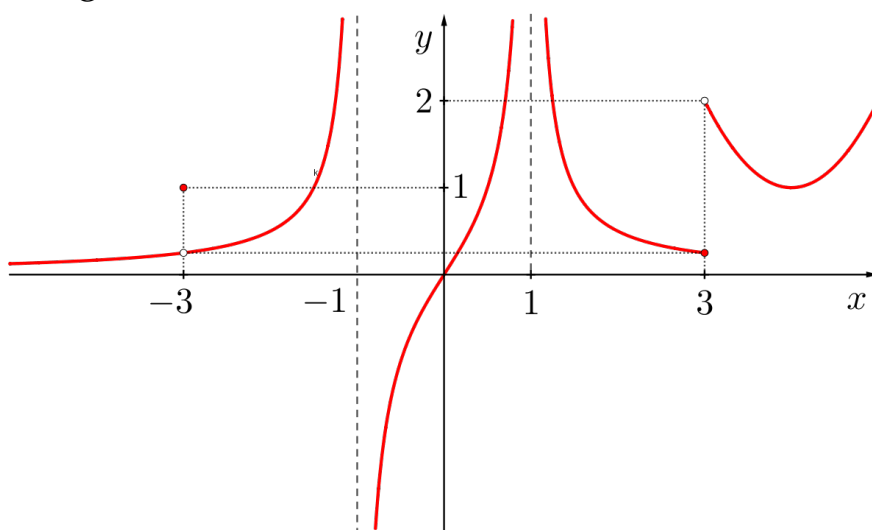
(i) **odstranitelná nespojitost**, pokud $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ a $f(x_0) \neq L$.

(ii) **skok**, pokud $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$).

■ Nespojitost druhého druhu, pokud není bod x_0 nespojitostí prvního druhu (tj. alespoň jedna z jednostranných limit je nevlastní nebo neexistuje).

Spojítost funkce

Funkce f zadaná grafem



- má body nespojitosti $-3, -1, 1, 3$
 - body odstranitelné nespojitosti -3
 - body neodstranitelné nespojitosti $-1, 1, 3$
- v bodě 3 je spojitá zleva

Věta (Pravidla pro počítání s limitami)

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$, $L_1, L_2, x_0 \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{R}$, pak pokud má pravá strana rovnosti smysl, platí:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \cdot L_1$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, pro $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.

Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, platí uvedená tvrzení i pro jednostranné limity

Postup při výpočtu limity:

Při výpočtu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, vždy nejprve dosadíme bod x_0 (nebo hodnoty z jeho okolí) do předpisu funkce a snažíme se určit limitu jako hodnotu funkce v bodě x_0 (nebo v jeho okolí).

Věta (Limita typu $\frac{k}{0}$ ($k \neq 0$))

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \neq 0$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Existuje-li prstencové okolí bodu x_0 , takové, že pro každé x z tohoto okolí platí

- $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$,
- $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

- Věta platí i pro jednostranné okolí a limity.
- Při výpočtu limity typu $\left\| \frac{k}{0} \right\|$, kde $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$ je potřeba určit **obě jednostranné limity** a zjistit, zda jsou si rovny. Pokud ne, limita neexistuje.

Věta (Limita složené funkce)

Mějme složenou funkci $h = f(g) = f \circ g$, tj. $h(x) = f(g(x))$, přičemž $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = b$, kde $x_0, u_0, b \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:

- a) Existuje-li prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0)$ je $g(x) \neq u_0$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = b$
- b) Je-li funkce f spojitá v bodě u_0 , tj. $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) = b$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) = f(u_0) = b$.

Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, platí uvedená tvrzení i pro jednostranné limity.

Limita funkce

Příklad 10.4

Vypočítejte limity funkcí

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)$,
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \left(\frac{1}{2} \right)^x \right)$,
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{3x^2 + 5x + 2}$,
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x^2 + 5x + 1}$,
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x + 1}{x + 2}$,
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x + 1}{x + 2}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, kde $f : x^2$, pro $x \in \mathbb{R} - \{2\} \wedge f(2) = 10$.

