



FACULTY OF CIVIL institute
ENGINEERING of mathematics
and descriptive geometry

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

11. Derivace funkce, její geometrický a fyzikální význam, pravidla pro derivování. Derivace složené a inverzní funkce. Derivace elementárních funkcí.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

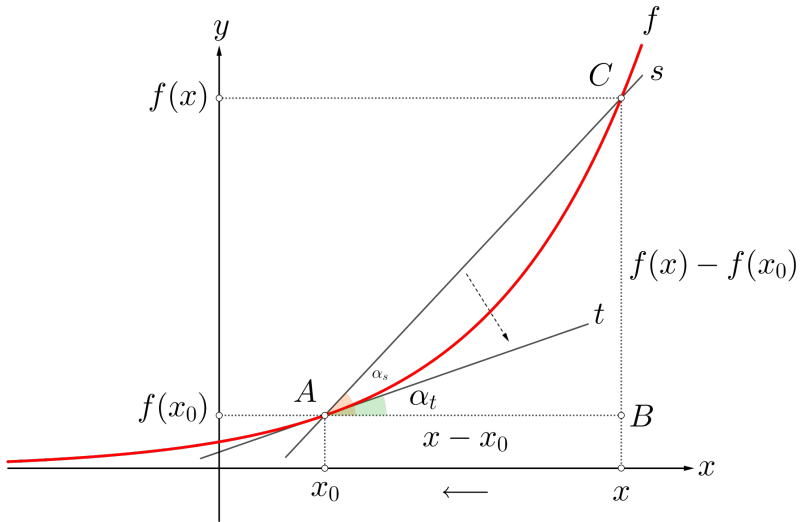
- [1] Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2008. ISBN: 978-80-7204-982-0



Isaac Newton



Gottfried Wilhelm Leibniz



Definice

Je-li funkce f definovaná v nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazýváme ji **derivací funkce f v bodě x_0** a značíme ji $f'(x_0)$.

Pokud $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **vlastní derivaci**.

Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **nevlastní derivaci**.

Pokud limita neexistuje, řekneme, že funkce f nemá v bodě x_0 derivaci, nebo že derivace v bodě x_0 **neexistuje**.

Definice

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, nazýváme tuto limitu **derivací zprava** funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'_+(x_0)$.

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, nazýváme tuto limitu **derivací zleva** funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'_-(x_0)$.

Je-li f funkce a $M = \{x \in \mathbb{R}; \text{ existuje vlastní } f'(x_0)\}$, pak funkci

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

s definičním oborem M nazveme **derivací funkce f na množině M** .

Poznámky:

- Při označení $x = x_0 + h$ používáme také zápis

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Slovem „derivace“ budeme v dalším textu rozumět vlastní derivaci.
- Derivaci funkce $y = f(x)$ se mimo f' také značívá y' , $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$.
- Symboly df a dx nazýváme **přírůstky** na f a na x . Výraz $df(x_0) = f'(x_0)dx$ nazýváme **diferenciál funkce f v bodě x_0** . Označíme-li $df(x_0) = y - f(x_0)$ a $dx = x - x_0$, vidíme, že geometrický význam diferenciálu je „**přírůstek na tečně**“.

Příklad 11.1

Odvod'te z definice derivaci $f'(x_0)$ funkce $f(x) = x^3$.

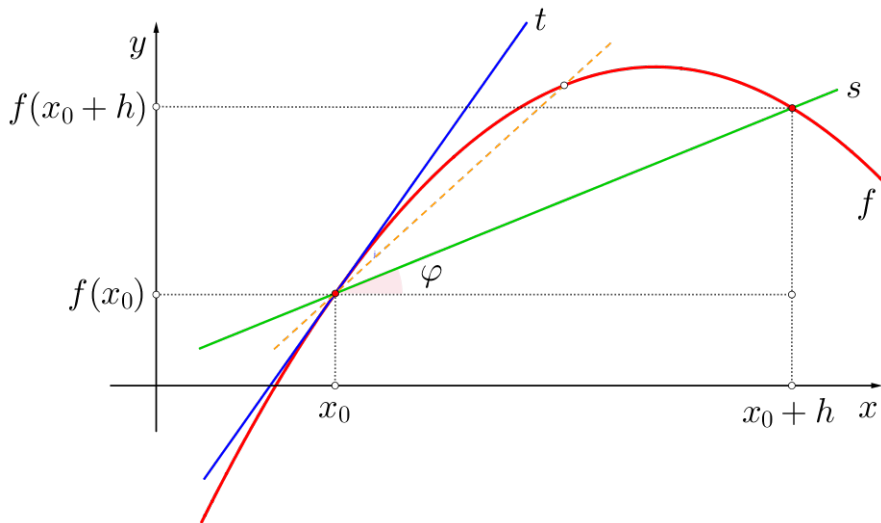
Sečna grafu funkce f procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ je obecná přímka $y = kx + q$ se směrnici

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Jestliže se s bodem $x_0 + h$ blížíme k bodu x_0 (tj. provádíme limitní přechod $h \rightarrow 0$), přejde tato sečna v tečnu v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Tečna ke grafu funkce f v bodě x_0 je tedy přímka $y = kx + q$ se směrnici

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

což je přesně derivace funkce f v bodě x_0 nebo-li číslo $f'(x_0)$.

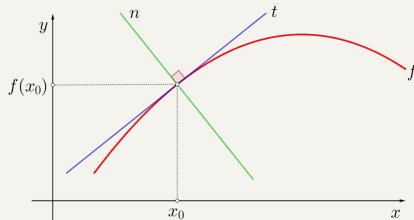


Dosazením bodu $[x_0, f(x_0)]$ do přímky $y = kx + q$ dostaneme rovnici tečny t ke grafu funkce f v bodě x_0 :

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Normála n , jakožto přímka kolmá k tečně procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$, má rovnici

$$n : y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$



- Derivace $f'(x_0)$ vyjadřuje **okamžitou rychlost změny funkční hodnoty** funkce f v bodě x_0 . Tj. je-li $f'(x_0) = c \in \mathbb{R}$, potom na jednu jednotku změny hodnoty nezávisle proměnné x připadá c jednotek změny závisle proměnné y .
- Zejména z toho plyne, že
 - (i) je-li $c > 0$, pak s rostoucím x roste i y ,
 - (ii) je-li $c < 0$, pak s rostoucím x hodnota y klesá,
 - (iii) je-li $c = 0$ pak funkce v bodě x_0 ani neroste ani neklesá (to znamená, že je buď konstantní nebo nabývá v bodě x_0 svého maxima či minima).

Pomocí derivací můžeme odvodit zákony klasické mechaniky:

- Rychlost je změna polohy v čase $v = \frac{s}{t}$. Potom okamžitá rychlost v čase t je

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{ds}{dt} = s'(t).$$

- Zrychlení je změna rychlosti v čase, tedy podobně obdržíme

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t).$$

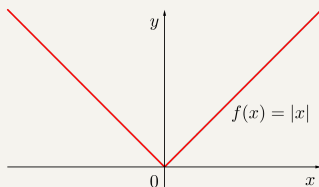
Věta (O existenci derivace)

Funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci zprava a derivaci zleva a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Věta (O spojitosti derivace)

Necht' funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci. Pak je v tomto bodě spojitá.

Pozor! Obrácená věta neplatí. Např. funkce $f(x) = |x|$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, ale v $x_0 = 0$ nemá derivaci.



A) Májí-li funkce f a g derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a jestliže $c \in \mathbb{R}$, pak platí:

1. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.
2. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
3. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.
4. Je-li $g(x_0) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

B) Má-li funkce g derivaci v bodě x_0 a funkce f má derivaci v bodě $y_0 = g(x_0)$, pak platí

$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g))'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

C) Je-li funkce f spojitá a ryze monotónní na otevřeném intervalu I a má-li v bodě $y_0 \in I$ derivaci $f'(y_0) \neq 0$, pak funkce f^{-1} má derivaci v bodě $x_0 = f(y_0)$ a platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

Poznámka:

Při derivování složené funkce je vhodné začít od vnější složky a pokračovat dovnitř („jako u loupání cibule“), tj.

$$(f \circ g \circ h)'(x) = [f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Důležité vzorce upravující funkci před derivací

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}, \quad \log_{g(x)} f(x) = \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}.$$

Nechť $a, b, c, n \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $n \neq 0$, $b \neq 1$.

$$\blacksquare (c)' = 0,$$

$$\blacksquare (x^n)' = nx^{n-1},$$

$$\blacksquare (e^x)' = e^x,$$

$$\blacksquare (a^x)' = a^x \cdot \ln a,$$

$$\blacksquare (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$\blacksquare (\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b},$$

$$\blacksquare (\sin x)' = \cos x,$$

$$\blacksquare (\cos x)' = -\sin x,$$

$$\blacksquare (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\blacksquare (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\blacksquare (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\blacksquare (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\blacksquare (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\blacksquare (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Příklad 11.2

Napište rovnici tečny a normály pro $f(x) = x^3$ v bodě $A = [2, ?]$.

Příklad 11.3

Zadané funkce derivujte a výsledek upravte

a) $f(x) = \arccos x,$

b) $f(x) = \ln^2 x,$

c) $f(x) = \ln(x^2),$

d) $f(x) = \sin(x^2),$

e) $f(x) = \sin^2 x,$

f) $f(x) = x^{x^2},$

g) $f(x) = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}.$

Děkuji za pozornost!

