FACULTY OF CIVIL ENGINEERING institute of mathematics and descriptive geometry

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

11. Derivace funkce, její geometrický a fyzikální význam, pravidla pro derivování. Derivace složené a inverzní funkce. Derivace elementárních funkcí.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

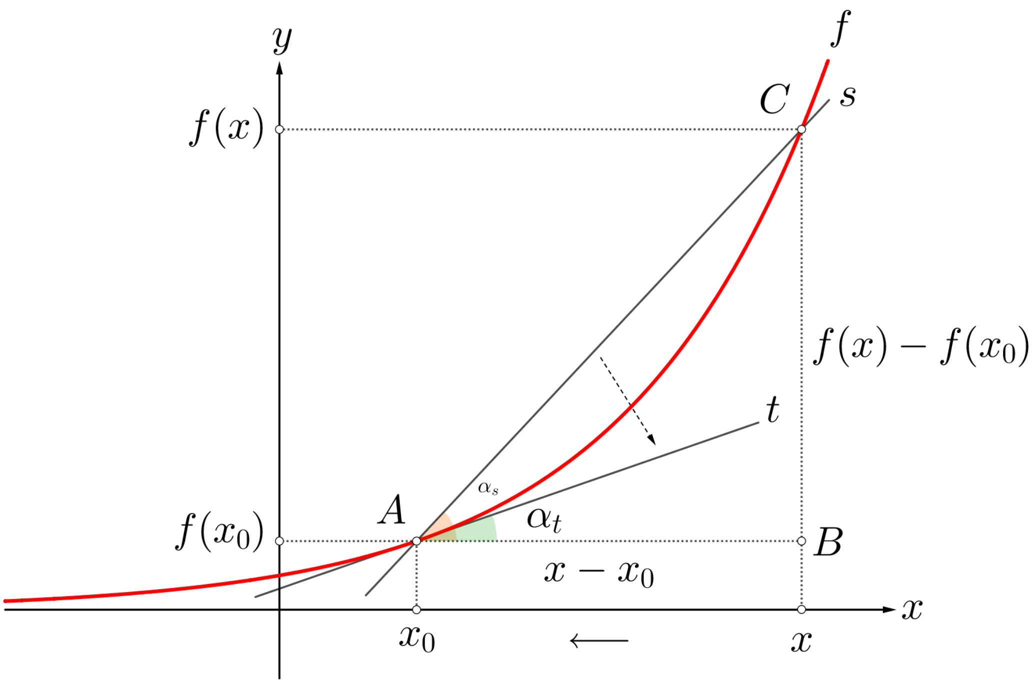
Základní literatura

[1] Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2008. ISBN: 978-80-7204-982-0

Isaac Newton

Gottfried Wilhelm Leibniz

Derivace funkce



Definice

Je-li funkce f definovaná v nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazýváme ji **derivací funkce** f **v bodě** x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

Pokud $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **vlastní derivaci**.

Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **nevlastní derivaci**.

Pokud limita neexistuje, řekneme, že funkce f nemá v bodě x_0 derivaci, nebo že derivace v bodě x_0 **neexistuje**.

Definice

Existuje-li $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, nazýváme tuto limitu **derivací zprava** funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'_+(x_0)$.

Existuje-li $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, nazýváme tuto limitu **derivací zleva** funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'_-(x_0)$.

Je-li f funkce a $M = \{x \in \mathbb{R};\ \text{existuje vlastní } f'(x_0)\}$, pak funkci

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

s definičním oborem M nazveme **derivací funkce** f **na množině** M.

Poznámky:

- Při označení $x = x_0 + h$ používáme také zápis
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
- Slovem „derivace“ budeme v dalším textu rozumět vlastní derivaci.
- Derivaci funkce $y = f(x)$ se mimo f' také značívá y', $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
- Symboly $\mathrm{d}f$ a $\mathrm{d}x$ nazýváme **přírustky** na f a na x. Výraz $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$ nazýváme **diferenciál funkce** f v bodě x_0. Označíme-li $\mathrm{d}f(x_0) = y - f(x_0)$ a $\mathrm{d}x = x - x_0$, vidíme, že geometrický význam diferenciálu je **„přírustek na tečně“**.

Příklad 11.1

Odvoďte z definice derivaci $f'(x_0)$ funkce $f(x) = x^3$.

Geometrický význam derivace

Sečna grafu funkce f procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ je obecná přímka $y = kx + q$ se směrnicí

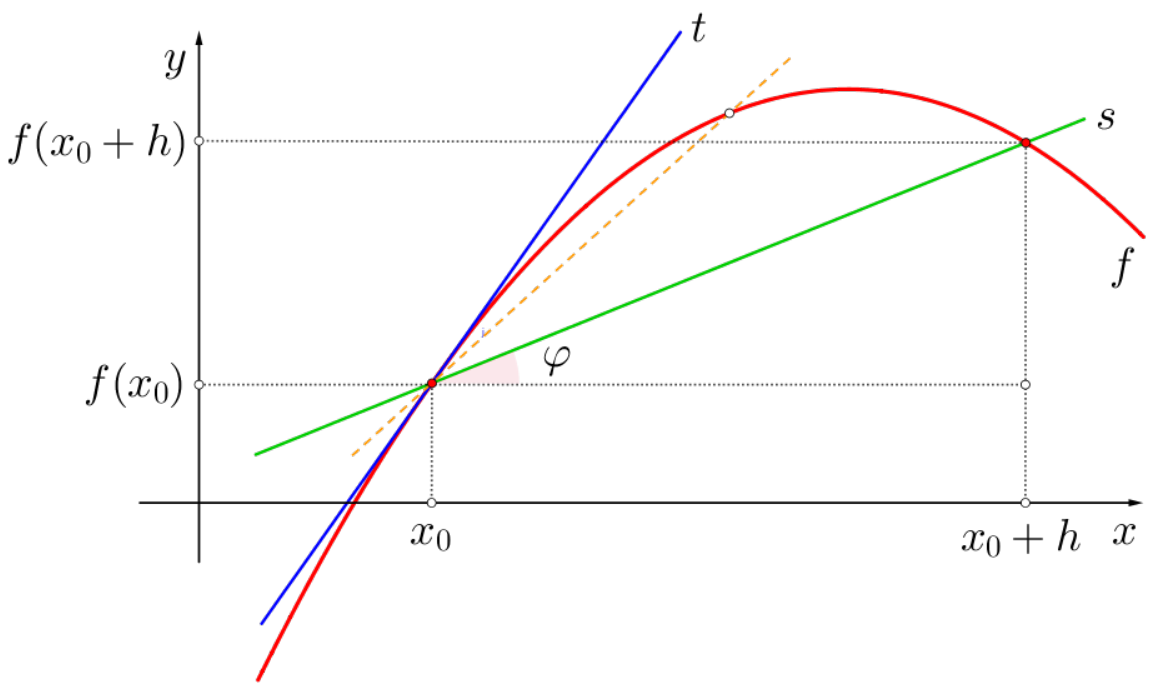
$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Jestliže se s bodem $x_0 + h$ blížíme k bodu x_0 (tj. provádíme limitní přechod $h \to 0$), přejde tato sečna v tečnu v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Tečna ke grafu funkce f v bodě x_0 je tedy přímka $y = kx + q$ se směrnicí

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

což je přesně derivace funkce f v bodě x_0 nebo-li číslo $f'(x_0)$.

Geometrický význam derivace



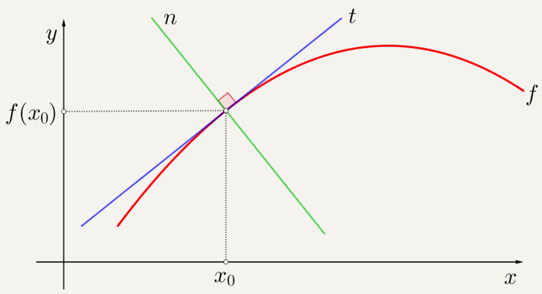
Rovnice tečny a normály

Dosazením bodu $[x_0, f(x_0)]$ do přímky $y = kx + q$ dostaneme rovnici tečny t ke grafu funkce f v bodě x_0:

$$t: \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Normála n, jakožto přímka kolmá k tečně procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$, má rovnici

$$n: \quad y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$



Fyzikální význam derivace

- Derivace $f'(x_0)$ vyjadřuje **okamžitou rychlost změny funkční hodnoty** funkce f v bodě x_0. Tj. je-li $f'(x_0) = c \in \mathbb{R}$, potom na jednu jednotku změny hodnoty nezávisle proměnné x připadá c jednotek změny závisle proměnné y.
- Zejména z toho plyne, že
  - (i) je-li $c > 0$, pak s rostoucím x roste i y,
  - (ii) je-li $c < 0$, pak s rostoucím x hodnota y klesá,
  - (iii) je-li $c = 0$ pak funkce v bodě x_0 ani neroste ani neklesá (to znamená, že je buď konstantní nebo nabývá v bodě x_0 svého maxima či minima).

Fyzikální význam derivace

Pomocí derivací můžeme odvodit zákony klasické mechaniky:

- Rychlost je změna polohy v čase $v = \dfrac{s}{t}$. Potom okamžitá rychlost v čase t je
$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = s'(t).$$
- Zrychlení je změna rychlosti v čase, tedy podobně obdržíme
$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = s''(t).$$

Vlastnosti derivace

Věta (O existenci derivace)

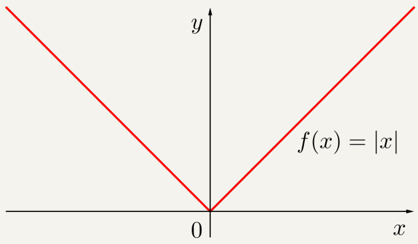
Funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci zprava a derivaci zleva a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Věta (O spojitosti derivace)

Nechť funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci. Pak je v tomto bodě spojitá.

Vlastnosti derivace

Pozor! Obrácená věta neplatí. Např. funkce $f(x) = |x|$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, ale v $x_0 = 0$ nemá derivaci.



Pravidla pro derivování

A) Májí-li funkce f a g derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a jestliže $c \in \mathbb{R}$, pak platí':

1. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.
2. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
3. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.
4. Je-li $g(x_0) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

B) Má-li funkce g derivaci v bodě x_0 a funkce f má derivaci v bodě $y_0 = g(x_0)$, pak platí

$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g))'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

C) Je-li funkce f spojitá a ryze monotónní na otevřeném intervalu I a má-li v bodě $y_0 \in I$ derivaci $f'(y_0) \neq 0$, pak funkce f^{-1} má derivaci v bodě $x_0 = f(y_0)$ a platí

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

Poznámka:
Při derivování složené funkce je vhodné začít od vnější složky a pokračovat dovnitř („jako u loupání cibule“), tj.

$$(f \circ g \circ h)'(x) = [f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Důležité vzorce upravující funkci před derivací

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}, \qquad \log_{g(x)} f(x) = \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}.$$

Derivace elementárních funkcí

Nechť $a, b, c, n \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $n \neq 0$, $b \neq 1$.

- $(c)' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$,
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,
- $(\log_b x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln b}$,
- $(\sin x)' = \cos x$,
- $(\cos x)' = -\sin x$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Derivace funkce

Příklad 11.2

Napište rovnici tečny a normály pro $f(x) = x^3$ v bodě $A = [2, ?]$.

Derivace funkce

Příklad 11.3

Zadané funkce derivujte a výsledek upravte

a) $f(x) = \arccos x$,

b) $f(x) = \ln^2 x$,

c) $f(x) = \ln(x^2)$,

d) $f(x) = \sin(x^2)$,

e) $f(x) = \sin^2 x$,

f) $f(x) = x^{x^2}$,

g) $f(x) = -\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\sin x}}$.

Děkuji za pozornost!