FACULTY OF CIVIL ENGINEERING institute of mathematics and descriptive geometry

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

12. Derivace vyšších řádů, geometrický význam první a druhé derivace funkce pro určování průběhu funkce, l'Hospitalovo pravidlo, asymptoty.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

FCE

[1] Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2008. ISBN: 978-80-7204-982-0

Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital

Derivace vyšších řádů

Derivace vyšších řádů

Má-li funkce f s definičním oborem $D(f)$ konečnou derivaci $f'(x)$ pro každé x z množiny $M \subset D(f)$, pak pro vnitřní bod $x_0 \in M$ má smysl se ptát, zda funkce f' má v bodě x_0 derivaci, tj. zda existuje:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Pokud existuje, pak ji nazveme **derivací 2. řádu** funkce f v bodě x_0 a označíme ji $f''(x_0)$. Obecně pro $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Poznámky:

- K existenci derivace $n-$tého řádu je nutná existence nejenom $(n-1)-$ní derivace funkce f, ale i všech předchozích derivací. Aby definice byla smysluplná i pro $n = 1$, budeme funkci f označovat za nultou derivaci funkce f, píšeme $f^{(0)} = f$.
- Pro derivace vyšších řádů budeme používat značení

$$f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots, f^{(n)}.$$

- V ostatních typech značení se n-tá derivace píše jako

$$y^{(n)}, \quad \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}, \quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

Příklad 12.1

Vypočítejte derivace vyšších řádů funkce $f(x) = 2x^5$.

Příklad 12.2 [viz Příklad 11.3.g]

Vypočítejte druhou derivaci funkce $f(x) = -\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\sin x}}$ a výsledek upravte.

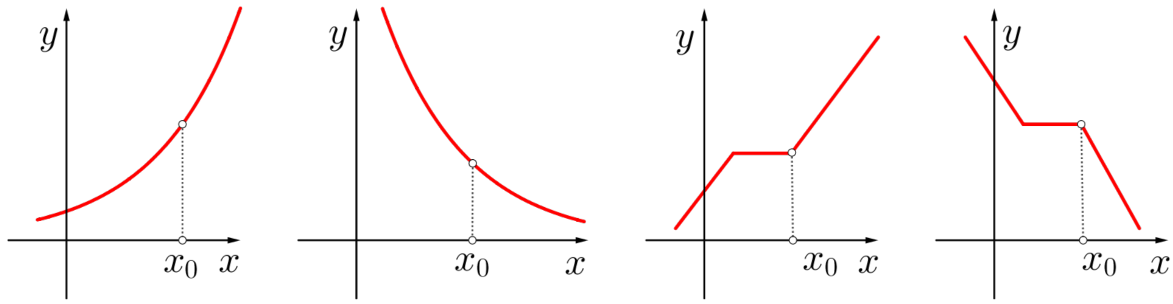
Definice

Řekneme, že funkce f je **rostoucí** v bodě x_0, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset D(f)$ takové, že

pro libovolné $x_1 < x_0, x_1 \in \mathcal{U}(x_0)$ je $f(x_1) < f(x_0)$

a pro libovolné $x_2 > x_0, x_2 \in \mathcal{U}(x_0)$ je $f(x_2) > f(x_0)$.

Poznámka:
Podobným způsobem definujeme vlastnosti: **klesající**, **neklesající** a **nerostoucí** funkce v bodě x_0.



Věta

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci $f'(x_0) > 0$, resp. $f'(x_0) < 0$, pak je funkce v bodě x_0 **rostoucí**, *resp.* **klesající**.

Věta

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li v intervalu (a, b) derivaci, která je kladná, resp. záporná, pak je f **rostoucí**, *resp.* **klesající, na intervalu** $\langle a, b\rangle$.

Definice (Lokální extrémy)

Funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$ **ostré lokální minimum**, resp. **ostré lokální maximum**, jestliže existuje okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta) \subset D(f)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ platí $f(x) > f(x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0)$.
Jsou-li uvedené nerovnosti neostré, tzn. že platí $f(x) \geq f(x_0)$, resp. $f(x) \leq f(x_0)$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **lokální minimum**, resp. **lokální maximum**.

- Lokální maximum a lokální minimum nazýváme společným názvem **lokální extrémy**.
- Ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme souhrnně **ostré lokální extrémy**.
- Lokální extrém nenastává v bodech, kde funkce f není definovaná, ani v krajních bodech intervalů, které tvoří definiční obor funkce f.

Věta

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0 a nechť existuje její derivace v nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta)$.

- *Jestliže platí*

$$f'(x) > 0 \text{ pro } x \in \mathcal{P}^-(x_0, \delta) \quad a \quad f'(x) < 0 \text{ pro } x \in \mathcal{P}^+(x_0, \delta),$$

  pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.
- *Jestliže platí*

$$f'(x) < 0 \text{ pro } x \in \mathcal{P}^-(x_0, \delta) \quad a \quad f'(x) > 0 \text{ pro } x \in \mathcal{P}^+(x_0, \delta),$$

  pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Definice

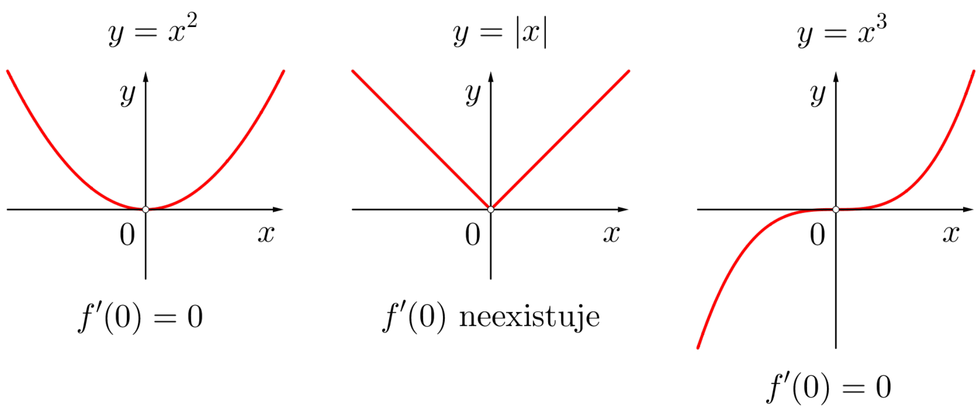
Je-li $f'(x_0) = 0$, pak bod x_0 nazýváme **stacionární bod** funkce f.

Věta

Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém. Potom $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Poznámka:

Opačné tvrzení neplatí. Tj. pokud $f'(x_0) = 0$, tak z toho neplyne, že bod x_0 je lokální extrém (viz např. $f(x) = x^3$ a $x_0 = 0$).



Věta

Nechť $f'(x_0) = 0$ a funkce f v bodě x_0 má druhou derivaci $f''(x_0) \neq 0$. Pak má funkce f v bodě x_0 ostrý lokální extrém a to

- *ostré lokální maximum, jestliže $f''(x_0) < 0$,*
- *ostré lokální minimum, jestliže $f''(x_0) > 0$.*

Definice (Absolutní (globální) extrémy)

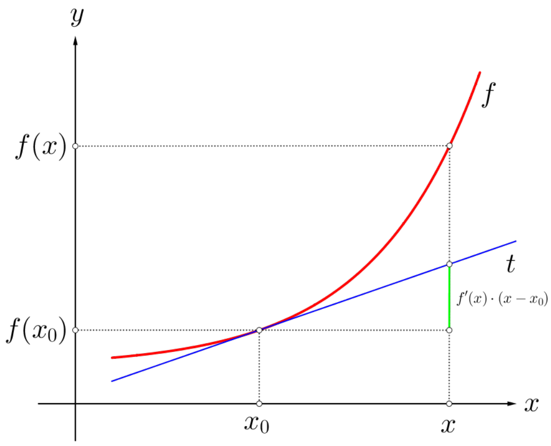
Největší a nejmenší hodnotu funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D(f)$ nazýváme **absolutním (globálním) maximem a minimem** funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

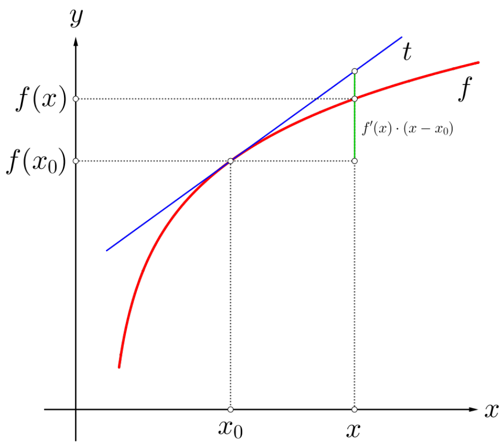
Věta

Nechť f je spojitá a diferencovatelná funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak absolutní extrém funkce f na $\langle a, b\rangle$ nastává buď ve stacionárním bodě nebo v krajním bodě intervalu $\langle a, b\rangle$.

Definice

Má-li funkce f derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak řekneme, že f je v bodě x_0 **ryze konvexní**, resp. **ryze konkávní**, jestliže existuje okolí $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$ platí $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, tj. graf funkce f leží v $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ nad tečnou, resp. pod tečnou, sestrojenou v bodě $[x_0, f(x_0)]$.





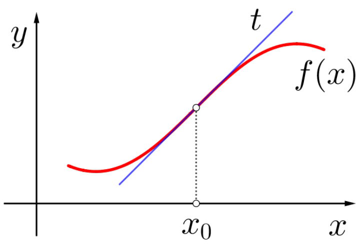
Věta

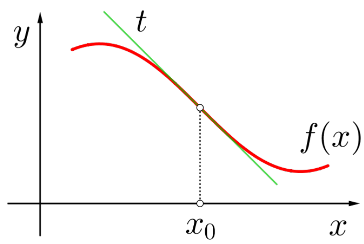
Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ druhou derivaci $f''(x_0)$, pak je-li

1. $f''(x_0) > 0$, *je f v bodě x_0 ryze konvexní,*
2. $f''(x_0) < 0$, *je f v bodě x_0 ryze konkávní.*

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **inflexní bod**, jestliže v bodě x_0 existuje tečna ke grafu funkce f a f'' zde mění znaménko, tj. funkce se mění v x_0 z konvexní na konkávní, nebo opačně.



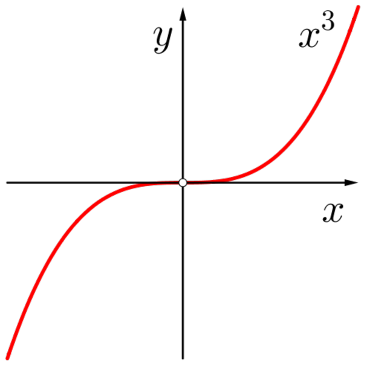


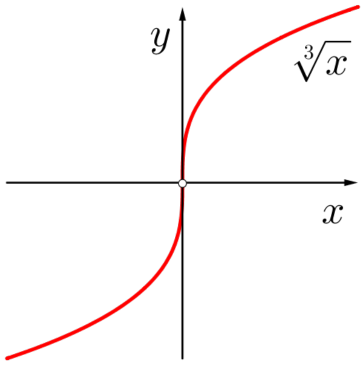
Funkce konvexní a konkávní

Poznámka:
Tečna v bodě x_0 není „klasická“, protože graf funkce f ji v tomto bodě protíná. Pro inflexní bod x_0 funkce f platí:

(i) $f''(x_0) = 0$,

(ii) $f''(x_0)$ neexistuje [důvod: jelikož $f'(x_0)$ je nevlastní].





L'Hospitalovo pravidlo

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Mají-li funkce f a g v prstencovém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ konečné derivace a platí-li

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

nebo

$$\lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty,$$

pak z existence limity $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *plyne existence* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí rovnost*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{LP}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hospitalovo pravidlo

- Analogické tvrzení platí i pro obě jednostranné limity.
- L'Hospitalovo pravidlo lze použít **jen** u limit typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$, $\left\|\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right\|$.
- Vhodnou úpravou lze převést neurčité výrazy typu $\left\|0\cdot\infty\right\|$, $\left\|\infty-\infty\right\|$, $\left\|1^\infty\right\|$, $\left\|\infty^0\right\|$ a $\left\|0^0\right\|$ na jeden z typů $\left\|\frac{0}{0}\right\|$, $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$.
- L'Hospitalovo pravidlo lze použít i **opakovaně**. Vycházejí-li stále i po $(n$-$1)$. zderivování čitatele a jmenovatele neurčité výrazy typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ či $\left\|\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right\|$, pak tvrzení z předešlé věty lze zobecnit na

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=L \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=L.$$

L'Hospitalovo pravidlo

POZOR! Při použití L'Hospitalova pravidla nederivujeme $\frac{f(x)}{g(x)}$ jako podíl, ale derivujeme zvlášť funkci v čitateli a zvlášť funkci ve jmenovateli.

Příklad 12.3

Užitím L'Hospitalova pravidla najděte limity

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$,

b) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$,

a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Definice (Asymptota bez směrnice)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Přímka $x = x_0$ se nazývá **asymptota bez směrnice** funkce f v bodě x_0 právě tehdy, když má funkce f v bodě x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Definice (Asymptota se směrnicí)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Přímka $y = ax + b$ se nazývá **asymptota se směrnicí** funkce f pro $x \to \infty$, resp. pro $x \to -\infty$, právě tehdy, když

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{a} \qquad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax],$$

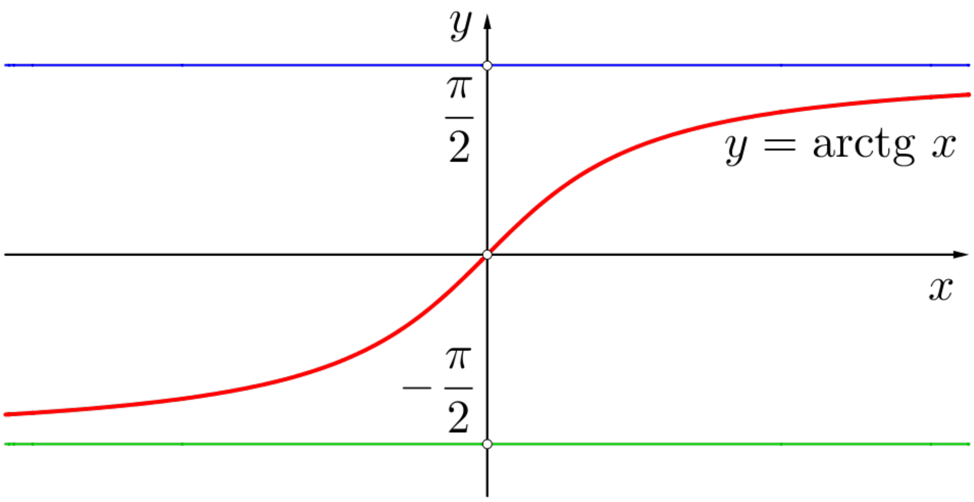
resp.

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{a} \qquad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax].$$

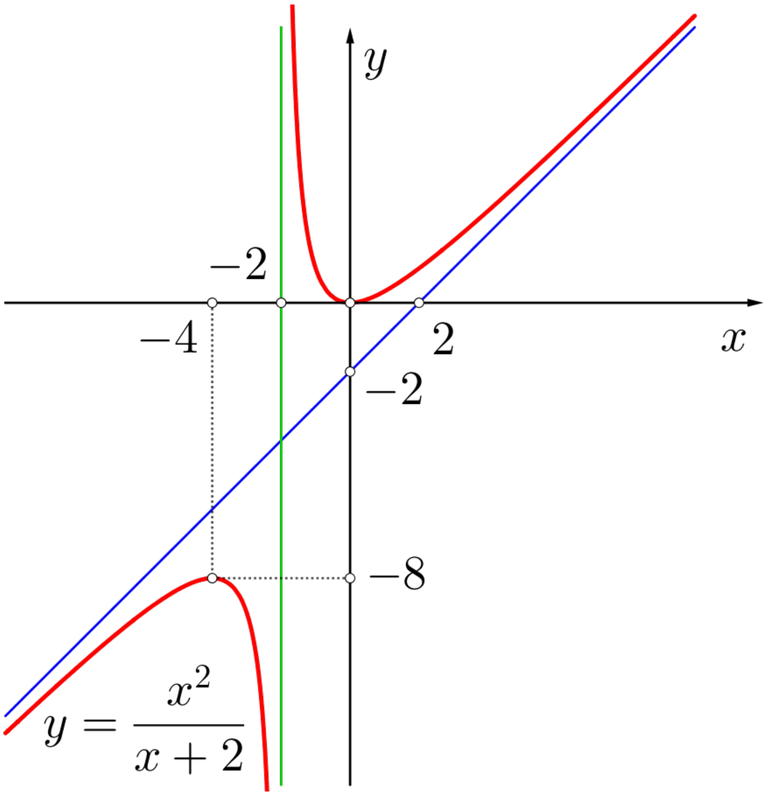
Asymptoty grafu funkce

- Asymptota je tedy přímka, která je tečnou ke grafu funkce v některém z jejích nevlastních bodů:
  (i) $[x_0, \pm\infty]$ - přímka $x = x_0$ rovnoběžná s osou y (asymptota bez směrnice).
  (ii) $[\pm\infty, b]$ - přímka $y = b$ rovnoběžná s osou x (asymptota se směrnicí $a = 0$).
  (iii) $[\pm\infty, \pm\infty]$ - přímka $y = ax + b$ protínající osu x a osu y (asymptota se směrnicí $a \neq 0$).
- Asymptoty bez směrnice hledáme v bodech nespojitosti funkce nebo na okraji definičního oboru funkce.
- Pokud při výpočtu koeficientů a, b u asymptoty se směrnicí jedna z limit **neexistuje nebo je nevlastní**, pak funkce asymptotu se směrnicí **nemá**.

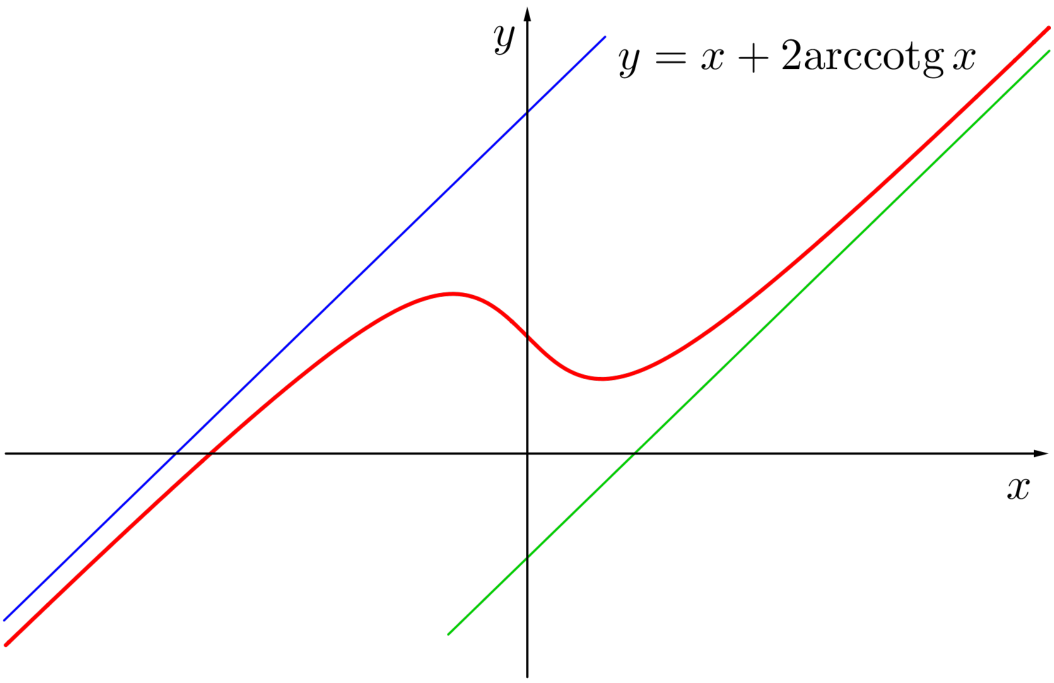
Asymptoty grafu funkce



Asymptoty grafu funkce



Asymptoty grafu funkce



(i) **Přímo z funkce**: $D(f)$, sudost či lichost, periodičnost, průsečíky s osami, kladnost a zápornost.

(ii) **Z první derivace**: rostoucí a klesající, lokální extrémy.

(iii) **Z druhé derivace**: konvexní a konkávní, inflexní body.

(iv) **Asymptoty**: se směrnicí a bez směrnice.

(v) **Načrtnutí grafu**: ke všem výše zmíněným bodům dopočítáme funkční hodnoty a zkombinujeme zjištěné informace.

Příklad 12.4

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}.$$

Vyšetřování průběhu funkce

i) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x+1 \neq 0$. Proto máme $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Poněvadž platí

$$f(-x) = -\frac{x^2}{-x+1} \neq \pm f(x),$$

není zadaná funkce ani lichá, ani sudá. Zřejmě funkce nemůže být ani periodická. Určíme průsečíky s osou x a s osou y:

$$f(x) = 0 \iff x = 0 \iff S_x = S_y = [0, 0].$$

Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
sgn f	$+$	$-$	$-$
f	kladná	záporná	záporná

Vyšetřování průběhu funkce

(ii) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \iff -x(x+2) = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
sgn f'	$-$	$+$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Z tabulky vidíme, že funkce má v $x = -2$ lokální minimum a v $x = 0$ lokální maximum. Spočtěme v těchto význačných bodech funkční hodnotu.

$$f(-2) = 4, \qquad f(0) = 0.$$

(iii) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-2x-2}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3}, \qquad D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{NŘ},$$

Druhá derivace tedy nemá žádný nulový bod. Nesmíme ovšem zapomenout, že její znaménko se může změnit i v bodech, ve kterých není definována (tj. v „dírách“ jejího definičního oboru).

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
sgn f''	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

(iv) Bod $x = -1$ je jediným bodem nespojitosti definičního oboru funkce f, tj. asymptotu bez směrnice hledáme právě v tomto bodě. Zjistíme limitní chování:

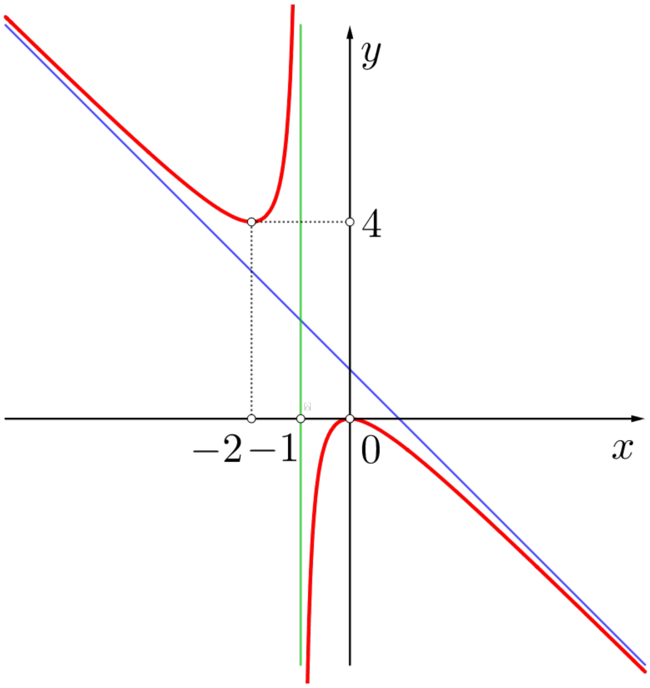
$$\lim_{x\to-1^+} -\frac{x^2}{x+1} = -\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{x+1} = -\left\| \tfrac{1}{0^+} \right\| = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-1^-} -\frac{x^2}{x+1} = -\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\left\| \tfrac{1}{0^-} \right\| = \infty.$$

Odtud plyne, že funkce má jedinou asymptotu bez směrnice o rovnici $x = -1$. Určíme i asymptoty se směrnicí (pokud existují):

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^2}{x^2+x} = -1,$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[-\frac{x^2}{x+1} - (-1)x \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má tedy v ∞ i $-\infty$ asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = -x + 1$.

(v) Nakonec zkombinujeme všechny předešlé výpočty a získáme graf funkce.



Příklad 12.5 ♣

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{3}{x}}.$$

♣ Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2008, **s. 111 –112**. ISBN: 978-80-7204-982-0

Děkuji za pozornost!