FACULTY OF CIVIL ENGINEERING institute of mathematics and descriptive geometry

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

13. Věty o funkcích spojitých na intervalu. Základní věty diferenciálního počtu. Diferenciál funkce. Taylorova věta. Derivace funkce dané parametricky.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

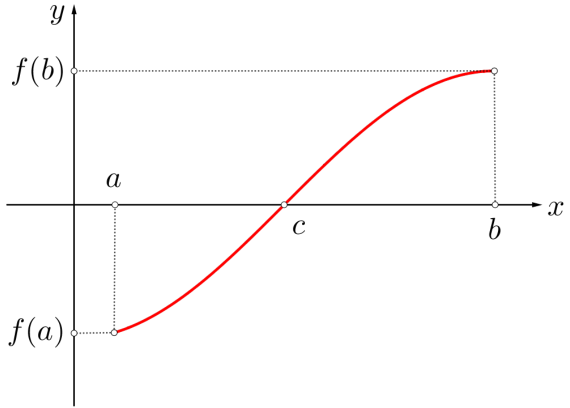
[1] Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2008. ISBN: 978-80-7204-982-0

Brook Taylor

Colin Maclaurin

Věta (Cauchyova věta o nulové hodnotě)

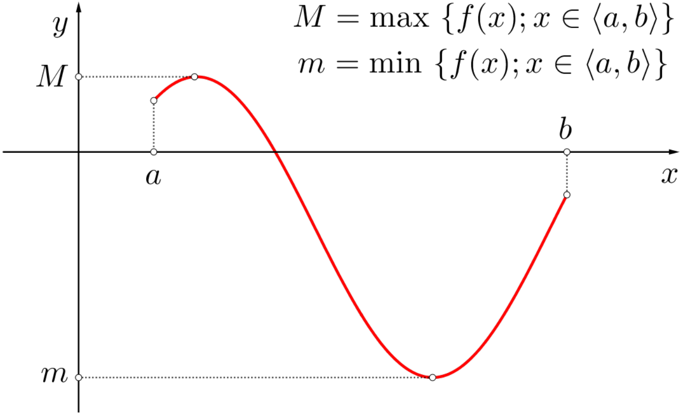
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí-li $f(a)\cdot f(b) < 0$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.



Věta (Weierstrassova věta)

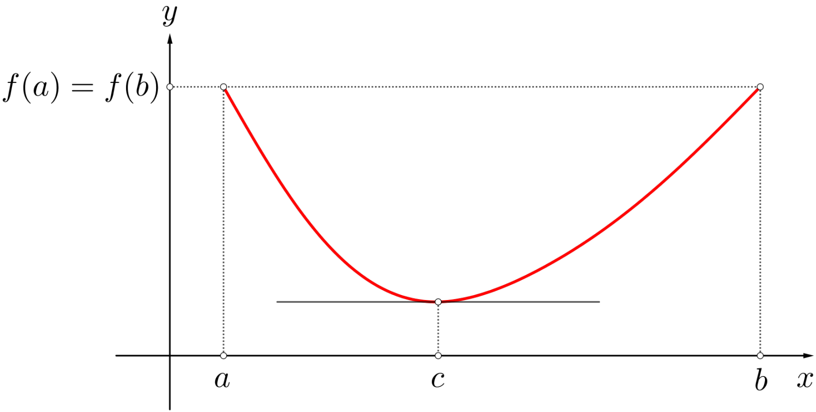
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je f na intervalu $\langle a, b\rangle$ ohraničená a nabývá na něm své největší a nejmenší hodnoty.

$$M = \max \{f(x); x \in \langle a, b\rangle\}$$
$$m = \min \{f(x); x \in \langle a, b\rangle\}$$



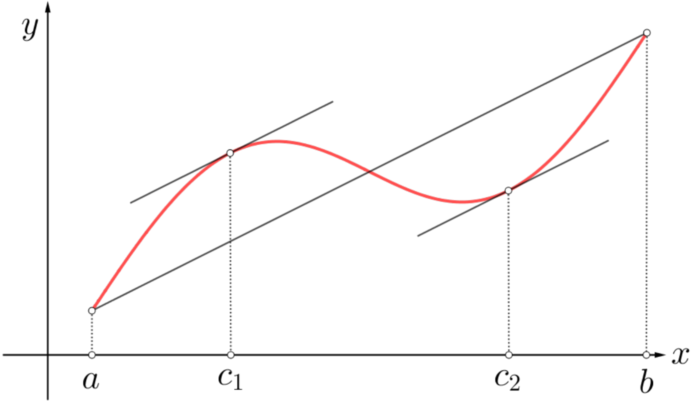
Věta (Rolleova věta)

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li derivaci v intervalu (a, b), přičemž $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.



Věta (Lagrangeova věta o přírůstku funkce)

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li derivaci v intervalu (a, b), pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.



Diferenciál funkce

Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$. Pak platí:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathcal{P}(x_0, \delta); \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

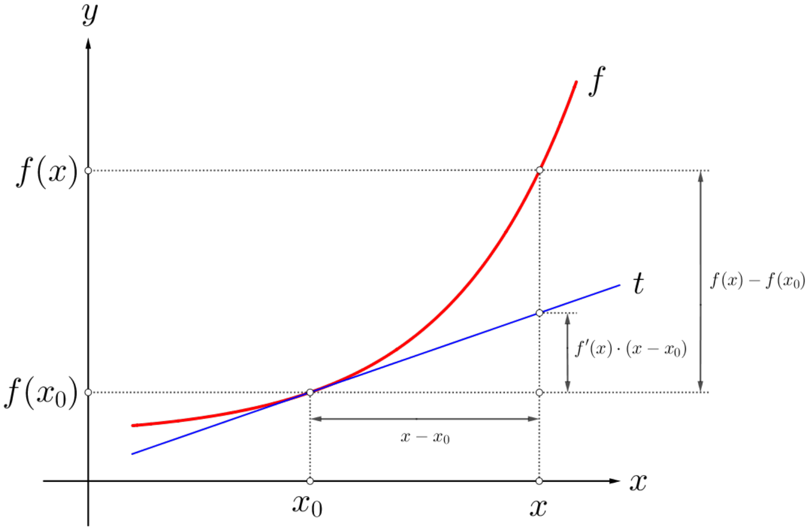
$$\Rightarrow \quad f'(x_0) \doteq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{v } \mathcal{P}(x_0, \delta)$$

$$\text{tj.} \quad f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\text{přírůstek funkčních hodnot}} \doteq \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{přírůstek funkčních hodnot na tečně}} \doteq f'(x_0) \cdot h$$

Diferenciál funkce



Diferenciál funkce

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak výraz

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h$$

nazýváme **diferenciálem funkce** f **v bodě** x_0 pro přírůstek h nezávisle proměnné x.

Příklad 13.1

Určete přibližně hodnotu $\ln \dfrac{5}{4}$.

Definice

Existuje-li (vlastní) $n-$tá derivace $f^{(n)}$ na množině $M \subset D(f)$, pak je na množině $M \times \mathbb{R}$ definovaná funkce dvou proměnných x a h, kde $x \in M$, $h \in \mathbb{R}$, kterou nazýváme **diferenciálem** $n-$**tého řádu** funkce f (nebo též $n-$tým diferenciálem funkce f). Označujeme jej

$$\mathrm{d}^n f(x,h) = f^{(n)}(x) \cdot h^n, x \in M, h \in \mathbb{R}.$$

Poznámky:
Při pevně zvoleném h píšeme $\mathrm{d}^n f(x_0)$.
Můžeme vyjádřit rekurentně $\mathrm{d}^n f(x,h) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} f(x,h))$.

Příklad 13.2

Vypočítejte $\mathrm{d}^3 f(2, 0.1)$, jestliže $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Slouží k libovolně přesné aproximaci (nahrazení) funkce f v okolí bodu x_0 polynomem stupně n.

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivace až do řádu n, pak polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = T_n(f, x_0, x - x_0),$$

kde $x_0, x \in \mathbb{R}$, se nazývá **Taylorův polynom** stupně n funkce f v bodě x_0. Funkci R_n, definovanou vztahem $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ nazýváme **zbytkem** řádu n. Je-li $x_0 = 0$, pak polynom T_n se někdy nazývá **Maclaurinův polynom**.

Taylorův polynom

Věta

Má-li funkce f v okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0 derivace až do řádu $n+1$, pak pro bod $x \in \mathcal{U}(x_0)$ platí

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

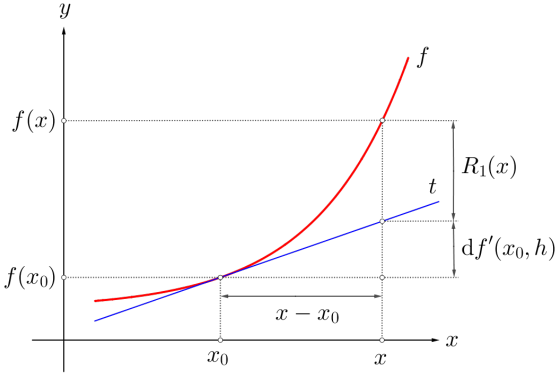
přičemž $R_n(x)$ lze psát ve tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

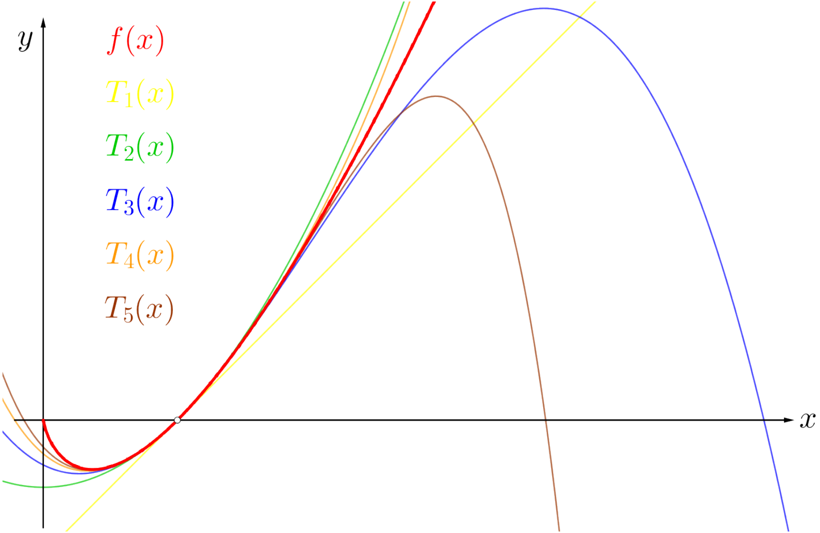
kde ξ je bod intervalu J s krajními body x_0 a x, tedy $\xi = x_0 + t(x - x_0), 0 < t < 1$.

Taylorův polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f(x_0, f)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(x_0, h)}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^n f(x_0, h)}{n!}$$

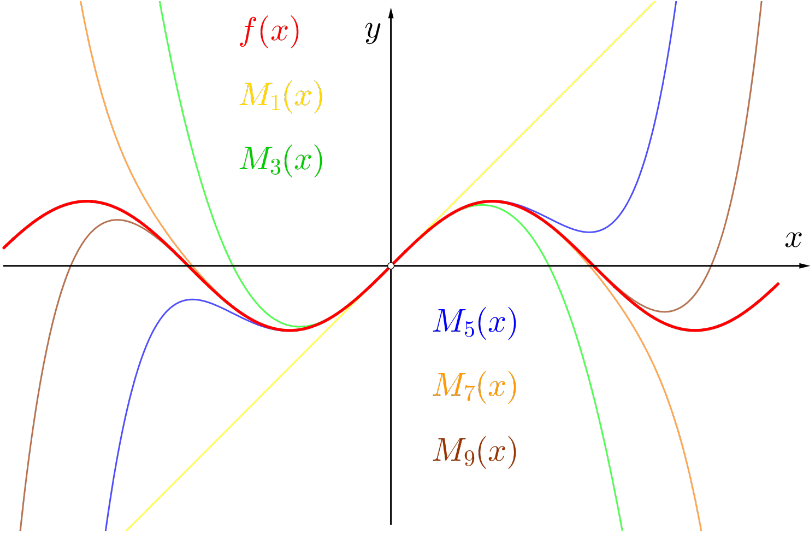


$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)\ldots$ tečna t – lineární aproximace.



$$f(x) = x \ln x, x_0 = 1$$

Taylorův polynom



$$f(x) = \sin x, x_0 = 0$$

Taylorovy (Maclaurinovy) polynomy elementárních funkcí v bodě $x_0 = 0$:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\ln(1+x) \approx \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Příklad 13.3

Určete Taylorův (Maclaurinův) polynom funkce f v bodě x_0 stupně n, je-li

a) $f(x) = \operatorname{tg} x, x = 0, n = 1$,

b) $f(x) = x\sqrt{x}, x = 1, n = 3$,

c) $f(x) = \sin x, x = 0, n = 4$.

Derivace funkce dané parametricky

$$f: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$x = x(t)$ je prostá a existuje inverzní funkce $t = \varphi(x)$

Z pravidla pro derivování inverzní funkce: $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$

Z pravidla pro derivování složené funkce:

$$y = y(t), t = \varphi(x) \Rightarrow y = y(\varphi(x)) \Longrightarrow y'_x = y'_t \cdot t'_x \Rightarrow y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$$

Derivace funkce dané parametricky

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad y''''_{xxxx} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}$$

Příklad 13.4

Vypočtěte derivaci funkce dané parametricky rovnicemi

$$f : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} .$$

Děkuji za pozornost!