



BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

13. Věty o funkčích spojitých na intervalu. Základní věty
diferenciálního počtu. Diferenciál funkce. Taylorova věta. Derivace
funkce dané parametricky.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFARÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura



- [1] Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2008. ISBN: 978-80-7204-982-0



Brook Taylor

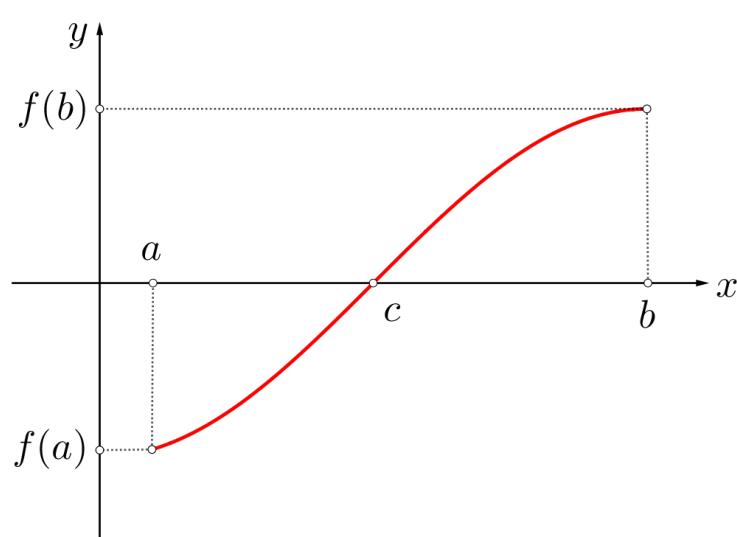


Colin Maclaurin

Vlastnosti funkcí spojитých na intervalu

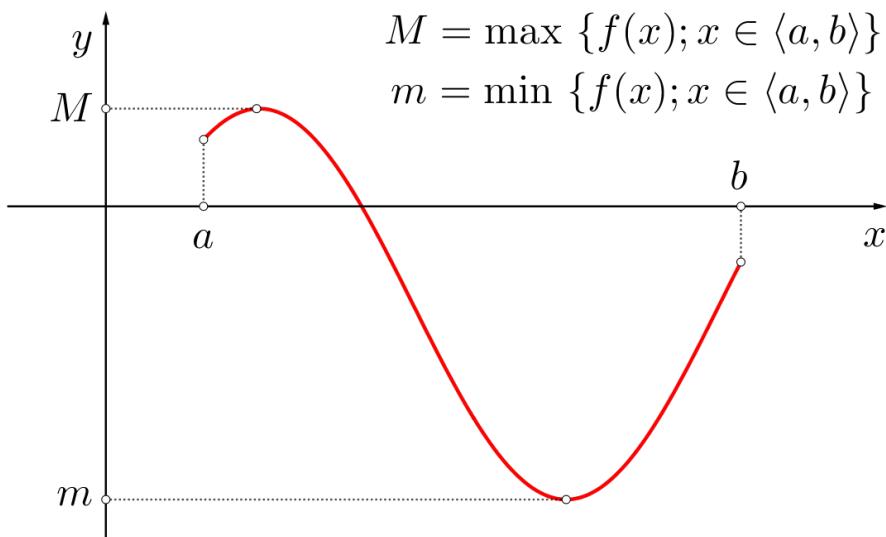
Věta (Cauchyova věta o nulové hodnotě)

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.



Věta (Weierstrassova věta)

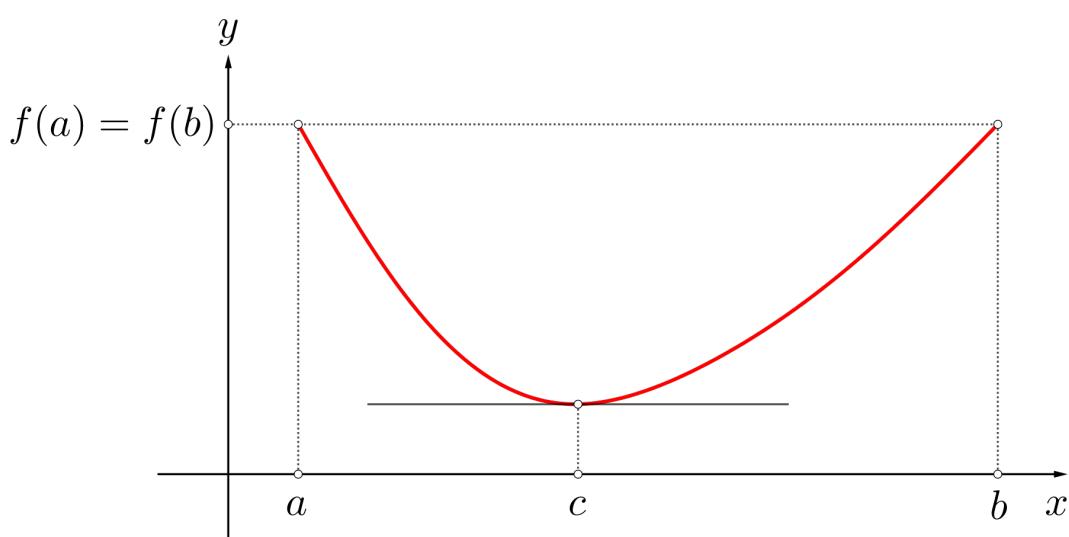
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je f na intervalu $\langle a, b \rangle$ ohraničená a nabývá na něm své největší a nejmenší hodnoty.



Vlastnosti funkcí spojитých na intervalu

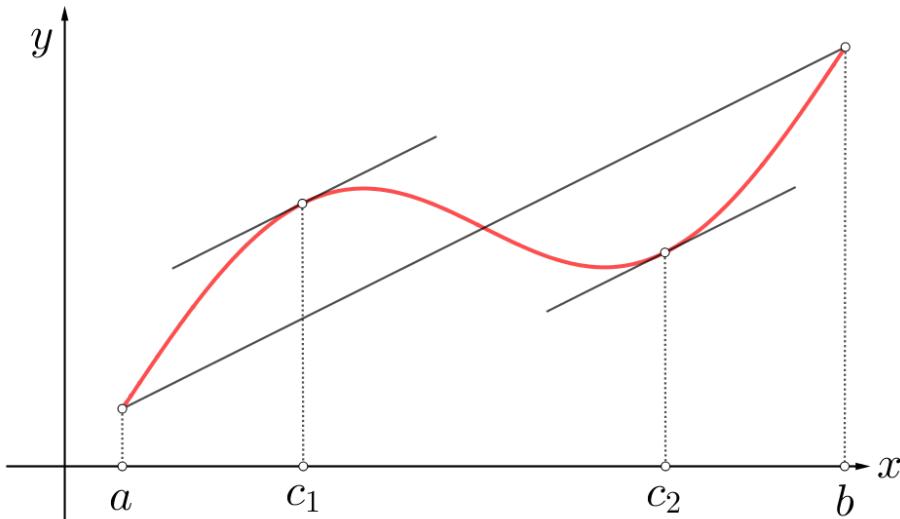
Věta (Rolleova věta)

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má-li derivaci v intervalu (a, b) , přičemž $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.



Věta (Lagrangeova věta o přírůstku funkce)

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má-li derivaci v intervalu (a, b) , pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.



Diferenciál funkce

Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$. Pak platí:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

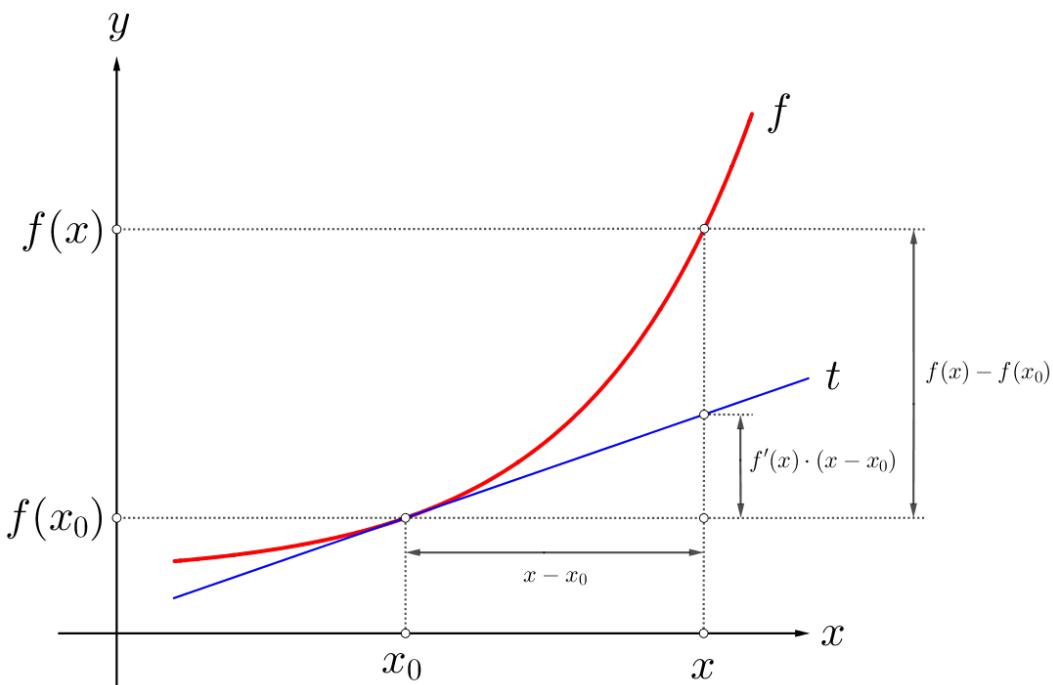
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathcal{P}(x_0, \delta); \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \doteq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{v } \mathcal{P}(x_0, \delta)$$

$$\text{tj. } f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\substack{\text{přírůstek} \\ \text{funkčních} \\ \text{hodnot}}} \doteq \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\substack{\text{přírůstek} \\ \text{funkčních hodnot} \\ \text{na tečně}}} \doteq f'(x_0) \cdot h$$



Diferenciál funkce

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak výraz

$$df(x_0, h) = f'(x_0)h$$

nazýváme **diferenciálem funkce f v bodě x_0** pro přírůstek h nezávisle proměnné x .

Příklad 13.1

Určete přibližně hodnotu $\ln \frac{5}{4}$.

Diferenciály vyšších řádů

Definice

Existuje-li (vlastní) n -tá derivace $f^{(n)}$ na množině $M \subset D(f)$, pak je na množině $M \times \mathbb{R}$ definovaná funkce dvou proměnných x a h , kde $x \in M$, $h \in \mathbb{R}$, kterou nazýváme **diferenciálem n -tého řádu** funkce f (nebo též n -tým diferenciálem funkce f). Označujeme jej

$$d^n f(x, h) = f^{(n)}(x) \cdot h^n, x \in M, h \in \mathbb{R}.$$

Poznámky:

Při pevně zvoleném h píšeme $d^n f(x_0)$.

Můžeme vyjádřit rekurentně $d^n f(x, h) = d(d^{n-1} f(x, h))$.

Příklad 13.2

Vypočítejte $d^3 f(2, 0.1)$, jestliže $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Taylorův polynom

Slouží k libovolně přesné approximaci (nahrazení) funkce f v okolí bodu x_0 polynomem stupně n .

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivace až do řádu n , pak polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = T_n(f, x_0, x - x_0),$$

kde $x_0, x \in \mathbb{R}$, se nazývá **Taylorův polynom** stupně n funkce f v bodě x_0 . Funkci R_n , definovanou vztahem $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ nazýváme **zbytkem** řádu n . Je-li $x_0 = 0$, pak polynom T_n se někdy nazývá **Maclaurinův polynom**.

Věta

Má-li funkce f v okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0 derivace až do řádu $n+1$, pak pro bod $x \in \mathcal{U}(x_0)$ platí

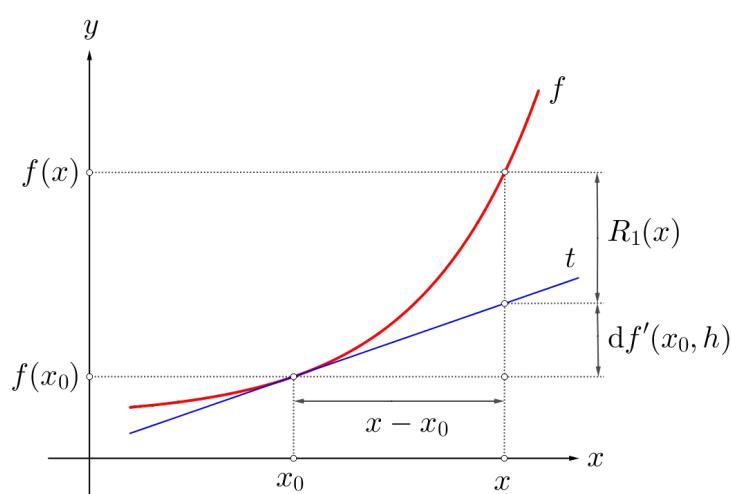
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

přičemž $R_n(x)$ lze psát ve tvaru

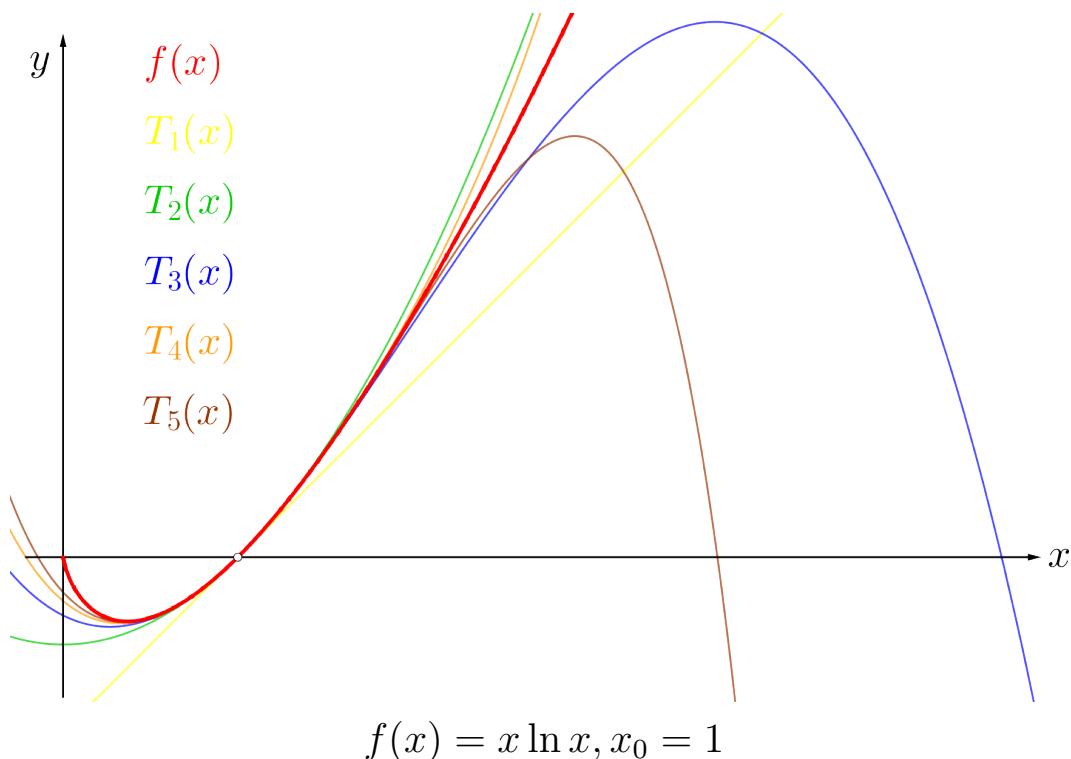
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

kde ξ je bod intervalu J s krajními body x_0 a x , tedy $\xi = x_0 + t(x - x_0)$, $0 < t < 1$.

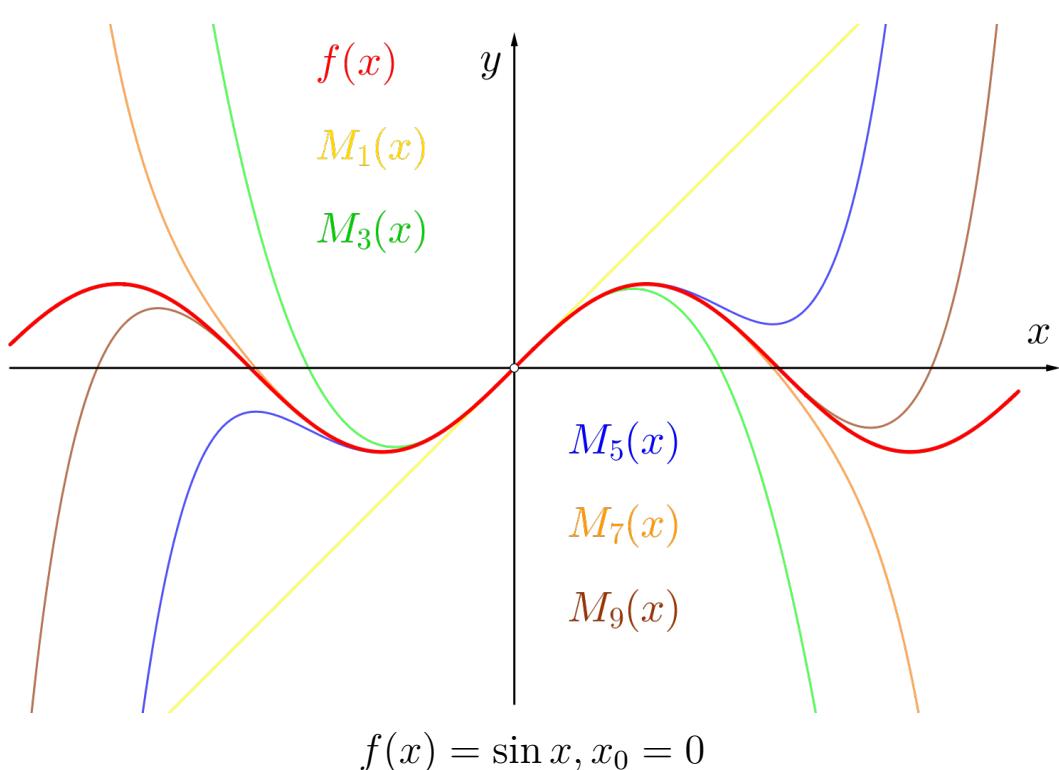
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0, f)}{1!} + \frac{d^2f(x_0, h)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0, h)}{n!}$$



$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$... tečna t – lineární approximace.



Taylorův polynom



Taylorův polynom

Taylorovy (Maclaurinovy) polynomy elementárních funkcí v bodě $x_0 = 0$:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x \approx \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\ln(1+x) \approx \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Taylorův polynom

Příklad 13.3

Určete Taylorův (Maclaurinův) polynom funkce f v bodě x_0 stupně n , je-li

- a) $f(x) = \operatorname{tg} x, x = 0, n = 1,$
- b) $f(x) = x\sqrt{x}, x = 1, n = 3,$
- c) $f(x) = \sin x, x = 0, n = 4.$

$$f : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$x = x(t)$ je prostá a existuje inverzní funkce $t = \varphi(x)$

Z pravidla pro derivování inverzní funkce: $t'_x = \frac{1}{x'_t}$

Z pravidla pro derivování složené funkce:

$$y = y(t), t = \varphi(x) \Rightarrow y = y(\varphi(x)) \Rightarrow y'_x = y'_t \cdot t'_x \Rightarrow y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$$

Derivace funkce dané parametricky

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad y''''_{xxxx} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}$$

Příklad 13.4

Vypočtěte derivaci funkce dané parametricky rovnicemi

$$f : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} .$$

Děkuji za pozornost!

