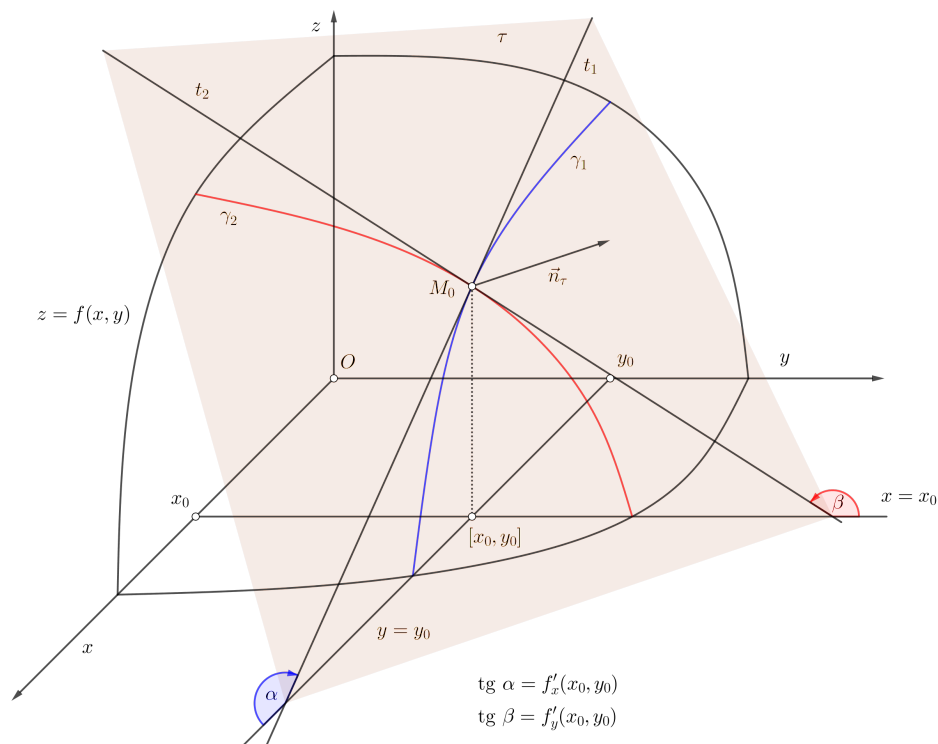




BAA009 Matematika II (G)

Cvičení č. 10

Tečná rovina a normála plochy v bodě $M = [x_0, y_0, z_0]$



a) explicitní tvar plochy $z = f(x, y)$

$$\tau : z - z_0 = f'_x(M)(x - x_0) + f'_y(M)(y - y_0) \quad \text{nebo}$$
$$f'_x(M)(x - x_0) + f'_y(M)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$n : \begin{aligned} x &= x_0 + f'_x(M) \cdot s \\ y &= y_0 + f'_y(M) \cdot s \quad s \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 - s \end{aligned}$$

$$\vec{s}_n = \vec{n}_\tau = (f'_x(M), f'_y(M), -1)$$

b) implicitní tvar plochy $F(x, y, z) = 0$

$$\tau : F'_x(M)(x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0$$

$$n : x = x_0 + F'_x(M) \cdot t$$

$$y = y_0 + F'_y(M) \cdot t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$z = z_0 + F'_z(M) \cdot t$$

$$\vec{s}_n = \vec{n}_\tau = (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M))$$

c) gradient v bodě $M = [x_0, y_0, z_0]$

$$\text{grad } f(x, y) = (f'_x(M), f'_y(M), -1)$$

$$\text{grad } F(x, y, z) = (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M))$$

$$\text{grad} \perp \tau$$

$$\text{grad} \parallel n$$

Poznámky k příkladům:

1. Máte-li sestavit tečnou rovinu nebo normálu plochy v zadaném bodě, dosadíte do výše uvedených vzorců
2. Pokud řešíte úlohu sestavit tečnou rovinu plochy, která je rovnoběžná se zadanou rovinou ρ , využijete faktu, že $\text{grad } f(x, y)$ resp. $\text{grad } F(x, y, z)$ je vlastně jen k -násobkem normálového vektoru zadané roviny:

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y) &= k \cdot \vec{n}_\rho \quad \text{nebo} \\ \text{grad } F(x, y, z) &= k \cdot \vec{n}_\rho \end{aligned}$$

Odsud si vyjádříte x, y a z pomocí k a dosadíte do rovnice plochy. Hodnoty k mám určit tečné body, ve kterých je tečná rovina τ rovnoběžná se zadanou rovinou ρ . Dál se postupuje podle bodu 1.

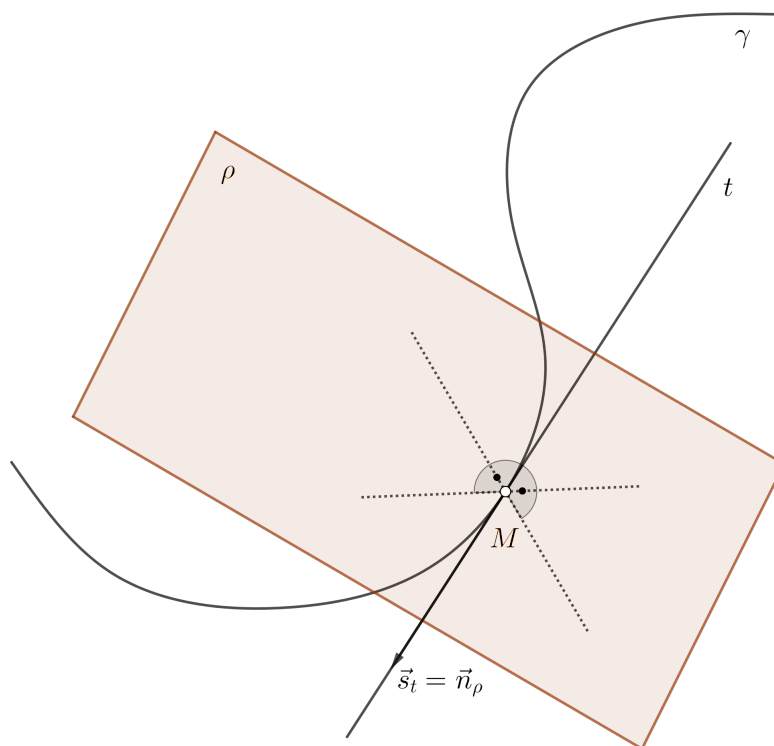
Stejným způsobem řešíte hledání tečné roviny kolmé k zadané přímce p . Jen místo normálového vektoru budete uvažovat směrový vektor přímky \vec{s}_p .

3. Řešíte-li úlohu sestavit tečnou rovinu, která je kolmá k zadaným rovinám α a β , využijete vztahu:

$$\vec{n}_\tau \perp (\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta).$$

Dále postupujete podle 2.

Tečna a normálová rovina prostorové křivky v bodě $M = [x_0, y_0, z_0]$



$$\begin{aligned} \gamma : \quad x &= x(t) \\ y &= y(t) \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t : \quad x &= x_0 + x'_t(M) \cdot s \\ y &= y_0 + y'_t(M) \cdot s \quad s \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 + z'_t(M) \cdot s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho : \quad x'_t(M)(x - x_0) + y'_t(M)(y - y_0) + z'_t(M)(z - z_0) &= 0 \\ \vec{s}_t = \vec{n}_\rho &= (x'_t(M), y'_t(M), z'_t(M)) \end{aligned}$$

Poznámky k příkladům:

1. Máte-li sestavit tečnu nebo normálovou rovinu prostorové křivky v zadaném bodě, dosadíte do výše uvedených vzorců
2. Pokud řešíte úlohu sestavit tečnu prostorové křivky, která je dána jako průsečnice dvou ploch F a G , využijete vztahu:

$$\vec{s}_t \perp (\text{grad } F, \text{grad } G),$$

\vec{s}_t tedy určíte pomocí vektorového součinu a poté dosadíte do výše uvedených vzorců.

3. Řešíte-li úlohu sestavit tečnu, která je kolmá k zadané rovině ν , využijete toho, že $\vec{s}_t \cdot \vec{n}_\nu = 0$.