FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA009 Matematika II (G)

Cvičení č. 6

Příklad 6.1. Určete definiční obor funkce a graficky ho znárorněte v $\mathbb{E}_2$.

a) $f(x,y) = \ln \dfrac{x}{y}$,

b) $f(x,y) = \sqrt{6x + 4y - x^2 - y^2 - 12}$,

c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$.

FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH $\quad f : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{R}$

$[x,y] \to z \in \mathbb{R}$

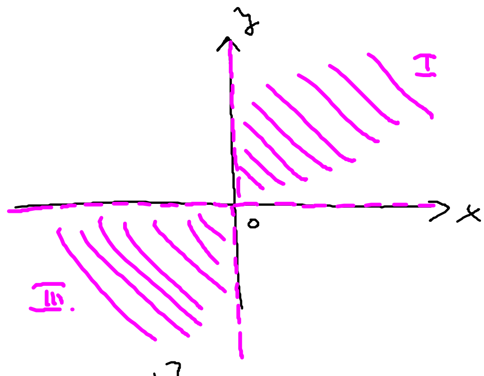
$z = f(x,y)$ $\quad$ 1) $D(f)$ … DEF. OBOR

2) $\forall\, X = [x,y] \in D(f)$ JE PŘIŘAZENO PRÁVĚ JEDNO REÁLNÉ ČÍSLO $z = f(x,y)$

a) $f(x,y) = \ln \dfrac{x}{y}$

$D(f)$: $\dfrac{x}{y} > 0 \;=\;$ 1. $x > 0 \wedge y > 0$

2. $x < 0 \wedge y < 0$



$D(f) : \{ [x,y] \in \mathbb{E}_2 \,;\, (x>0 \wedge y>0) \vee (x<0 \wedge y<0) \}$

FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA009 Matematika II (G)

Cvičení č. 6

Příklad 6.1. Určete definiční obor funkce a graficky ho znárorněte v $\mathbb{E}_2$.

a) $f(x,y)=\ln\dfrac{x}{y}$,

b) $f(x,y)=\sqrt{6x+4y-x^2-y^2-12}$,

c) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

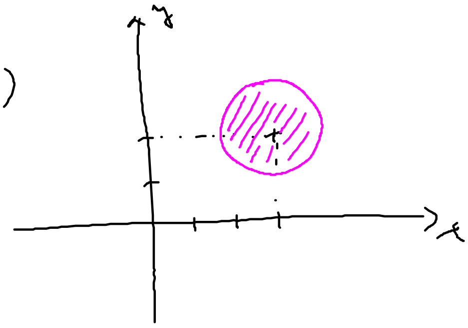
b) $f(x,y)=\sqrt{6x+4y-x^2-y^2-12}$

$D(f)$: $\quad 6x+4y-x^2-y^2-12\geq 0 \quad /\cdot(-1)$

$\underbrace{x^2-6x}+\underbrace{y^2-4y}+12\leq 0$

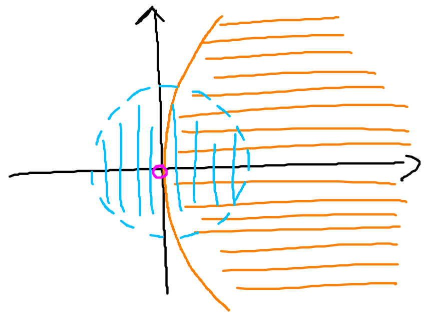
$(x-3)^2-9+(y-2)^2-4+12\leq 0$

$(x-3)^2+(y-2)^2\leq 1$



= KRUŽNICE : $k(S=[3,2],\ r=1)$

$D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ (x-3)^2+(y-2)^2\leq 1\}$



c) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

1. $4x-y^2\geq 0$
$y^2\leq 4x$
$\underbrace{\frac{1}{4}y^2\leq x}$

2. $1-x^2-y^2>0$
$\underbrace{x^2+y^2<1}$

3. $\ln(1-x^2-y^2)\neq 0$
$1-x^2-y^2\neq 1$
$x^2+y^2\neq 0$
$x\neq 0\ \wedge\ y\neq 0$
$\underbrace{[0,0]\notin D(f)}$

$D(f)=1.\cap 2.\cap 3.$

$D(f)=\{[x,y]\in\mathbb{E}_2;\ (\frac{1}{4}y^2\leq x\ \wedge\ x^2+y^2<0\ \wedge\ [0,0]\notin D(f)\}$

Příklad 6.2. Určete parciální derivace prvního řádu funkce.

a) $z = x^2 + 2xy + 3y^2$,

b) $z = x^y$,

c) $z = \dfrac{3xy}{x-y}$,

d) $z = ye^{\sqrt{x^2+y^2}}$.

PARCIÁLNÍ DERIVACE $A[x_0, y_0]$

$f(x,y)$

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f'_y(x_0,y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$$

LIMITY MUSÍ EXISTOVAT A MUSÍ BÝT KONEČNÉ!

$f''_{xx}, \ f''_{yy}, \ f''_{xy} = f''_{yx}$

↳ NEZÁLEŽÍ NA POŘADÍ DERIVOVÁNÍ, ZÁLEŽÍ POUZE NA TOM, KOLIKRÁT DERIVUJEME PODLE x A KOLIKRÁT DERIVUJEME PODLE y

$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}$

a) $z = x^2 + 2xy + 3y^2$

POKUD DERIVUJEME PODLE JEDNÉ PROMĚNNÉ, TAK NA DRUHOU PROMĚNNOU POHLÍŽÍME JAKO NA KONSTANTU.

$z'_x = f'_x(x,y) = 2x + 2y \cdot 1 + 0 = 2x + 2y$

$z'_y = f'_y(x,y) = 0 + 2x \cdot 1 + 3 \cdot 2y = 2x + 6y$

b) $z = x^y$

$z'_x = y x^{y-1}$ $\quad (x^n)'$

$z'_y = x^y \cdot \ln x$ $\quad (a^x)'$

Příklad 6.2. Určete parciální derivace prvního řádu funkce.

a) $z = x^2 + 2xy + 3y^2$,

b) $z = x^y$,

c) $z = \dfrac{3xy}{x-y}$,

d) $z = ye^{\sqrt{x^2+y^2}}$.

c) $z = \dfrac{3xy}{x-y}$

$$z'_x = \frac{3y(x-y) - 3xy \cdot 1}{(x-y)^2} = \frac{\cancel{3xy} - 3y^2 - \cancel{3xy}}{(x-y)^2} = -\frac{3y^2}{(x-y)^2}$$

$$z'_y = \frac{3x(x-y) - 3xy \cdot (-1)}{(x-y)^2} = \frac{3x^2 - \cancel{3xy} + \cancel{3xy}}{(x-y)^2} = \frac{3x^2}{(x-y)^2}$$

d) $z = ye^{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$z'_x = ye^{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x = \frac{xye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z'_y = 1 \cdot e^{\sqrt{x^2+y^2}} + y \cdot e^{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}y =$$

$$= e^{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2 e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = e^{\sqrt{x^2+y^2}}\left(1 + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Příklad 6.3. Určete parciální derivace 3. řádu funkce $z = x^2 \sin^2 y$.

$$z = x^2 \cdot \sin^2 y$$

$$z'_x = 2x \sin^2 y$$

$$z'_y = x^2 \cdot 2 \sin y \cos y = x^2 \sin 2y$$

$$z''_{xx} = 2 \sin^2 y$$

$$z''_{xy} = 2x\, 2 \sin y \cos y = 2x \sin 2y$$

$$z''_{yx} = 2x \sin 2y$$

$$z''_{yy} = x^2 \cos 2y \cdot 2 = 2x^2 \cos 2y$$

$$z'''_{xxx} = 0$$

$$z'''_{xxy} = z'''_{xyx} = z'''_{yxx} = 2 \sin 2y$$

$$z'''_{xyy} = 2 \cos 2y\, 2x = 4x \cos 2y$$

$$z'''_{yyy} = 2x^2(-\sin 2y)\,2 = -4x^2 \sin 2y$$