FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA009 Matematika II (G)

Cvičení č. 7

Příklad 7.1. Určete parciální derivace prvního řádu funkce $f(x,y,z) = x^3 + 8x^2y + 6y^3z^4 + 9y - 4z + 7$ v bodě $A = [1, 2, -1]$.

$$f(x,y,z) = x^3 + 8x^2 y + 6y^3 z^4 + 9y - 4z + 7 \quad , \quad A\,[1,2,-1]$$

$$f'_x = 3x^2 + 8y\,2x + 0 + 0 - 0 + 0 = 3x^2 + 16xy$$

$$f'_y = 0 + 8x^2 \cdot 1 + 6z^4\,3y^2 + 9 \cdot 1 - 0 + 0 = 8x^2 + 18y^2z^4 + 9$$

$$f'_z = 0 + 0 + 6y^3\,4z^3 + 0 - 4 \cdot 1 + 0 = 24y^3z^3 - 4$$

$$f'_x(A) = 35$$

$$f'_y(A) = 89$$

$$f'_z(A) = -196$$

Příklad 7.2. Určete parciální derivace 2. řádu funkce $f(x, y, z) = (x^2 + 3y)e^{4yz}$.

$$f'_x = 2x \cdot e^{4yz}$$

$$f'_y = 3 \cdot e^{4yz} + (x^2+3y)e^{4yz} \cdot 4z = (3+4x^2z+12yz)e^{4yz}$$

$$f'_z = (x^2+3y)e^{4yz} \cdot 4y = (4x^2y+12y^2)e^{4yz}$$

$$f''_{xx} = 2\,e^{4yz}$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = 2x\,e^{4yz} \cdot 4z = 8xz\,e^{4yz}$$

$$f''_{xz} = f''_{zx} = 2x\,e^{4yz} \cdot 4y = 8xy\,e^{4yz}$$

$$f''_{yx} = (0 + 4z\,2x + 0)e^{4yz} = 8xz\,e^{4yz}$$

$$f''_{yy} = 12z \cdot e^{4yz} + (3+4x^2z+12yz)e^{4yz} \cdot 4z = (24z+16x^2z^2+48yz^2)e^{4yz}$$

$$f''_{yz} = f''_{zy} = (4x^2+24y)e^{4yz} + (4x^2y+12y^2)e^{4yz} \cdot 4z =$$

$$= (4x^2+24y+16x^2yz+48y^2z)e^{4yz}$$

$$f''_{zz} = (4x^2y+12y^2)e^{4yz} \cdot 4y = (16x^2y^2+48y^3)e^{4yz}$$

Příklad 7.3. Určete df, d$^2 f$ funkce $f(x,y) = e^x \cos y$ v bodě $A = [0,0]$.

DIFERENCIÁL V BODĚ $A = [x_0, y_0]$

1. ŘÁDU: $df(A) = f'_x(A)\underbrace{\overbrace{(x-x_0)}^{h}}_{dx} + f'_y(A)\underbrace{\overbrace{(y-y_0)}^{k}}_{dy}$

2. ŘÁDU: $d^2 f(A) = f''_{xx}(A)(x-x_0)^2 + 2 f''_{xy}(A)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(A)(y-y_0)^2$

3. ŘÁDU: $d^3 f(A) = f'''_{xxx}(A)(x-x_0)^3 + 3 f'''_{xxy}(A)(x-x_0)^2(y-y_0) +$
$+ 3 f'''_{xyy}(A)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f'''_{yyy}(A)(y-y_0)^3$

$f(x,y) = e^x \cos y$, $A[0,0]$

$f'_x = e^x \cos y$ $\qquad f'_x(A) = e^0 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1$

$f'_y = e^x(-\sin y) = -e^x \sin y$ $\qquad f'_y(A) = -e^0 \sin 0 = -1 \cdot 0 = 0$

$df(A) = \underbrace{f'_x(A)}_{1}(x-0) + \underbrace{f'_y(A)}_{0}(y-0) = 1 \cdot x + 0 \cdot y = \underline{\underline{x}}$

$f''_{xx} = e^x \cos y$ $\qquad f''_{xx}(0,0) = 1 \cdot 1 = 1$

$f''_{xy} = f''_{yx} = -e^x \sin y$ $\qquad f''_{xy}(0,0) = -1 \cdot 0 = 0$

$f''_{yy} = -e^x \cos y$ $\qquad f''_{yy}(0,0) = -1 \cdot 1 = -1$

$d^2 f(A) = 1(x-0)^2 + 0(x-0)(y-0) - 1(y-0)^2 = \underline{\underline{x^2 - y^2}}$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$(a+b)^1$

$(a+b)^2$

$(a+b)^3$

$\vdots$

Příklad 7.4. Určete Taylotův polynom stupně n funkce f v bodě A

a) $f(x,y) = y \ln x$, $A = [1,2]$, $n = 2$,

b) $f(x,y) = 3x^2y + \sin^2 x + 5y - 2$, $A = [0,0]$, $n = 3$.

TAYLORŮV POLYNOM STUPNĚ n FUNKCE $z = f(x,y)$ V BODĚ $A[x_0, y_0]$

$$T_n(A) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2f(A)}{2!} + \dots + \frac{d^nf(A)}{n!}$$

$$f(X) \doteq T_n(A) + \cancel{R_n(A)}$$

$A = [0,0] \rightarrow$ MACLAURINŮV POLYNOM

a) $z = y \ln x$, $A[1,2]$, $n = 2$

$f'_x = y \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{x} = y x^{-1}$ $\qquad f(A) = 0$

$f'_y = \ln x$ $\qquad f'_x(A) = 2$

$f''_{xx} = y \cdot (-1) x^{-2} = -\frac{y}{x^2}$ $\qquad f'_y(A) = 0$

$f''_{xy} = \frac{1}{x}$ $\qquad f''_{xx}(A) = -2$

$f''_{yy} = 0$ $\qquad f''_{xy}(A) = 1$

$\qquad f''_{yy}(A) = 0$

$$df(A) = f'_x(A)(x-x_0) + f'_y(A)(y-y_0) = 2(x-1) + 0(y-2) = 2(x-1)$$

$$d^2f(A) = f''_{xx}(A)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(A)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(A)(y-y_0)^2 =$$
$$= -2(x-1)^2 + 2\,1\,(x-1)(y-2) + 0(y-2)^2 = -2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2)$$

$$T_2(A) = 0 + 2(x-1) + \frac{-2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2)}{2!} =$$
$$= \underline{\underline{2(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)(y-2)}}$$

Příklad 7.4. Určete Taylotův polynom stupně n funkce f v bodě A

a) $f(x,y) = y \ln x$, $A = [1,2]$, $n = 2$,

b) $f(x,y) = 3x^2y + \sin^2 x + 5y - 2$, $A = [0,0]$, $n = 3$.

$$T_3(A) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2f(A)}{2!} + \frac{d^3f(A)}{3!}$$

$f(A) = -2$

$f'_x = 6xy + 2\sin x \cos x = 6xy + \sin 2x$

$f'_y = 3x^2 + 5$

$f'_x(A) = 0$

$f'_y(A) = 5$

$df(A) = 0(x-0) + 5(y-0) = 5y$

$f''_{xx} = 6y + \cos 2x \cdot 2 = 6y + 2\cos 2x$

$f''_{xy} = 6x$

$f''_{yy} = 0$

$f''_{xx}(A) = 2$

$f''_{xy}(A) = 0$

$f''_{yy}(A) = 0$

$d^2f(A) = 2(x-0)^2 + 2\cdot 0(x-0)(y-0) + 0(y-0)^2 = 2x^2$

$f'''_{xxx} = 2(-\sin 2x)2 = -4\sin 2x$

$f'''_{xxy} = 6$

$f'''_{xyy} = 0$

$f'''_{yyy} = 0$

$f'''_{xxx}(A) = 0$

$f'''_{xxy}(A) = 6$

$f'''_{xyy}(A) = 0$

$f'''_{yyy}(A) = 0$

$$d^3(A) = f'''_{xxx}(A)(x-x_0)^3 + 3f'''_{xxy}(A)(x-x_0)^2(y-y_0) + 3f'''_{xyy}(A)(x-x_0)(y-y_0)^2 + f'''_{yyy}(A)(y-y_0)^3$$
$$= \cancel{0(x-0)^3} + 3\cdot 6(x-0)^2(y-0) + \cancel{3\cdot 0(x-0)(y-0)^3} + \cancel{0(y-0)^3}$$
$$= 18x^2y$$

$$T_3(A) = -2 + 5y + \frac{2x^2}{2!} + \frac{18x^2y}{3!} = \underline{\underline{-2 + 5y + x^2 + 3x^2y}}$$

Příklad 7.5. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

1) STACIONÁRNÍ BODY: $f'_x(x_0,y_0) = 0 \wedge f'_y(x_0,y_0) = 0$

2) $D(A) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix}$

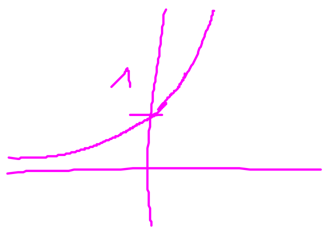
$D(A) > 0$ V BODĚ A JE LOKÁLNÍ EXTRÉM

$D(A) < 0$ V BODĚ A NENÍ LOKÁLNÍ EXTRÉM

$D(A) = 0$ NELZE ROZHODNOUT (MŮŽE, ALE NEMUSÍ BÝT)

3) $f''_{xx}(A) < 0$ LOKÁLNÍ MAXIMUM

$f''_{xx}(A) > 0$ LOKÁLNÍ MINIMUM



$e^{x-y}(x^2-2y^2)$

1. $f'_x = e^{x-y}(x^2-2y^2) + e^{x-y}(2x) = e^{x-y}\cdot(x^2+2x-2y^2)$

$f'_y = e^{x-y}(-1)(x^2-2y^2) + e^{x-y}(-4y) =$

$= e^{x-y}(-x^2+2y^2-4y)$

$$\left.\begin{aligned} x^2+2x-2y^2 &= 0 \\ -x^2+2y^2-4y &= 0 \end{aligned}\right\} + \Rightarrow 2x-4y=0 \quad x=2y \Rightarrow \begin{aligned} 4y^2+4y-2y^2 &= 0 \\ 2y^2+4y &= 0 \\ y^2+2y &= 0 \\ y(y+2) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y_1 = 0 \quad \vee \quad y_2 = -2$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = -4$

Příklad 7.5. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

$\Rightarrow$ STACIONÁRNÍ BODY : $A[0,0]$, $B[-4,-2]$

2.

$$f''_{xx} = e^{x-y}(x^2+2x-2y^2) + e^{x-y}(2x+2) =$$
$$= e^{x-y}(x^2+4x-2y^2+2)$$

$$f''_{xy} = e^{x-y}(-1)(x^2+2x-2y^2) + e^{x-y}(-4y) =$$
$$= e^{x-y}(-x^2-2x+2y^2-4y)$$

$$f''_{yy} = e^{x-y}(-1)(2y^2-4y-x^2) + e^{x-y}(4y-4) =$$
$$= e^{x-y}(x^2-2y^2+8y-4)$$

A : $f''_{xx}(A) = 2$, $f''_{xy}(A) = 0$, $f''_{yy}(A) = -4$

B : $f''_{xx}(B) = e^{-2} \cdot (-6)$, $f''_{xy}(B) = e^{-2} \cdot 8$, $f''_{yy}(B) = e^{-2} \cdot (-12)$

A : $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0 \Rightarrow$ NENÍ EXTRÉM

B : $\begin{vmatrix} -6e^{-2} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -12e^{-2} \end{vmatrix} = e^{-4}(72-64) = 8e^{-4} > 0 \Rightarrow$ JE EXTRÉM

3

$f''_{xx}(B) = -6e^{-2} < 0 \Rightarrow$ LOKÁLNÍ MAXIMUM V $B[-4,-2]$