FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA009 Matematika II (G)

Cvičení č. 8

Příklad 8.1. Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = y^3 + 3xy^2 + 2x^3 + 9x^2$.

1. $f'_x = 3y^2 + 6x^2 + 18x = 0$

$f'_y = 3y^2 + 6xy = 0$

$y^2 + 2x^2 + 6x = 0$

$y^2 + 2xy = 0 \Rightarrow y(y+2x) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = -2x$

1) $y = 0$: $2x^2 + 6x = 0$

$x^2 + 3x = 0$

$x(x+3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -3$

$A = [0,0]$

$B = [-3,0]$

2) $y = -2x$; $4x^2 + 2x^2 + 6x = 0$

$x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0 \vee x = -1, y = 2$

$C[-1,2]$

2. + 3.

$f''_{xx} = 12x + 18$ $\quad f''_{xx}(A) = 18$ $\quad f''_{xx}(B) = -18$ $\quad f''_{xx}(C) = 6$

$f''_{xy} = 6y$ $\quad f''_{xy}(A) = 0$ $\quad f''_{xy}(B) = 0$ $\quad f''_{xy}(C) = 12$

$f''_{yy} = 6y + 6x$ $\quad f''_{yy}(A) = 0$ $\quad f''_{yy}(B) = -18$ $\quad f''_{yy}(C) = 6$

A : $\begin{vmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ NELZE ROZHODNOUT

B : $\begin{vmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} = 18^2 > 0 \Rightarrow$ JE EXTRÉM $\wedge$ $f''_{xx}(B) = -18 < 0 \Rightarrow$ LOKÁLNÍ MAXIMUM

C : $\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 6^2 - 12^2 < 0 \Rightarrow$ NENÍ EXTRÉM

Příklad 8.2. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + y^3$ za podmínky $x + y - 3 = 0$.

$f(x,y) = x^3 + y^3$, PODM. $x + y - 3 = 0$

$y = 3 - x$

$f(x) = x^3 + (3-x)^3$

$f'(x) = 3x^2 + 3(3-x)^2 \cdot (-1) = 3x^2 - 3(9 - 6x + x^2) = \cancel{3x^2} - 27 + 18x - \cancel{3x^2} =$
$= 18x - 27$

$18x - 27 = 0$
$2x - 3 = 0$
$x = \frac{3}{2} \longrightarrow y = \frac{3}{2} \qquad [\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

$f''(x) = 18 \qquad f''(\frac{3}{2}) = 18 > 0$ $\Rightarrow$ LOK. MINIMUM

Příklad 8.3. Určete absolutní (globální) extrémy funkce.

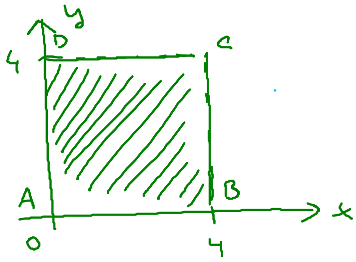
a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$, $x \in \langle 0,4 \rangle$, $y \in \langle 0,4 \rangle$,

b) $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, $y \geq x^2$, $y \leq 4$.

ABSOLUTNÍ (GLOBÁLNÍ) EXTRÉMY

1. LOKÁLNÍ EXTRÉMY – STAČÍ URČIT STACIONÁRNÍ BODY
2. HRANICE – VÁZANÉ EXTRÉMY
3. VRCHOLY HRANICE

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$; $x \in \langle 0,4 \rangle$, $y \in \langle 0,4 \rangle$



1. $f'_x = 3x^2 - 9y = 0$

$f'_y = 3y^2 - 9x = 0$

$x^2 - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{3}$

$y^2 - 3x = 0$

$\frac{x^4}{9} - 3x = 0 \quad / \cdot 9$

$x^4 - 27x = 0$

$x(\underbrace{x^3 - 27}_{a^3 - b^3}) = x(x-3)(\underbrace{x^2 + 3x + 9}_{>0}) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \vee \begin{matrix} x = 3 \\ y = 3 \end{matrix}$

$S_1 = [0,0]$, $S_2 [3,3]$

2. HRANICE: $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 4$

$x = 0$: $f(y) = y^3 + 27$

$f'(y) = 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \qquad [0,0]$

$x = 4$: $f(y) = 64 + y^3 - 36y + 27$

$f'(y) = 3y^2 - 36 = 0$

$y^2 - 12 = 0 \Rightarrow y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \qquad E_1 [4, 2\sqrt{3}]$

$E_2 [4, -2\sqrt{3}] \notin \square$

Příklad 8.3. Určete absolutní (globální) extrémy funkce.

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$, $x \in \langle 0,4 \rangle$, $y \in \langle 0,4 \rangle$,

b) $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, $y \geq x^2$, $y \leq 4$.

$y = 0$: $f(x) = x^3 + 27$

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad [0,0]$

$y = 4$: $f(x) = x^3 + 64 - 36x + 27$

$f'(x) = 3x^2 - 36 = 0$

$x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$ $\quad F_1[2\sqrt{3}, 4]$

$F_2[-2\sqrt{3}, 4] \notin D$

3\. $S_1[0,0] = A$ $\quad f(A) = 27$

$S_2[3,3]$ $\quad f(S_2) = 27 + 27 - 81 + 27 = 0$

$E_1[4, 2\sqrt{3}]$ $\quad f(E_1) = 64 + 8 \cdot 3\sqrt{3} - 9 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} + 27 = 91 - 48\sqrt{3} \doteq 7{,}9$

$F_1[2\sqrt{3}, 4]$ $\quad f(F_1) = 8 \cdot 3\sqrt{3} + 64 - 9 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 + 27 = 7{,}9$

$B[4,0]$ $\quad f(B) = 64 + 27 = 91$

$C[4,4]$ $\quad f(C) = 64 + 64 - 9 \cdot 16 + 27 = 11$

$D[0,4]$ $\quad f(D) = 64 + 27 = 91$

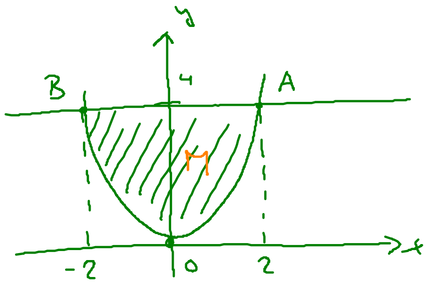
GLOBÁLNÍ MINIMUM : $[3,3]$

GLOBÁLNÍ MAXIMUM : $[4,0]$, $[0,4]$

Příklad 8.3. Určete absolutní (globální) extrémy funkce.

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$, $x \in \langle 0, 4\rangle$, $y \in \langle 0, 4\rangle$,

b) $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, $y \geq x^2$, $y \leq 4$.



b) $2x^3+4x^2+y^2-2xy$; $\underbrace{y \geq x^2,\ y \leq 4}_{M}$

1. $f'_x = 6x^2+8x-2y = 0$

$f'_y = 2y - 2x = 0 \Rightarrow x = y$

$6x^2+8x-2x=0$

$6x^2+6x=0$

$x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \vee \begin{matrix} x=-1 \\ y=-1 \end{matrix}$ $\quad S_1[0,0]$, $S_2[-1,-1] \notin M$

2. HRANICE: $y=x^2$, $y=4$

a) $y=4$: $f(x) = 2x^3+4x^2+16-8x$

$f'(x) = 6x^2+8x-8 = 0$

$3x^2+4x-4=0 \qquad x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 3(-4)}}{2\cdot 3} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$

$[-2,4] = B$; $[\frac{2}{3},4] = C$

b) $y=x^2$: $f(x) = 2x^3+4x^2+x^4-2x^3 = x^4+4x^2$

$f'(x) = 4x^3+8x = 0$

$x^3+2x=0$

$x(x^2+2)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0 \quad [0,0]$

$x^2=-2$ – NELZE

3.
$S_1[0,0] \quad f(S_1) = 0$

$B[-2,4] \quad f(B) = -2\cdot 8+4\cdot 4+16+2\cdot 2\cdot 4 = 32$

$C[\frac{2}{3},4] \quad f(C) = 2\cdot\frac{8}{27}+4\frac{4}{9}+16-2\cdot\frac{2}{3}\cdot 4 = \frac{352}{27} \doteq 13$

$A[2,4] \quad f(A) = 2\cdot 8+4\cdot 4+16-2\cdot 2\cdot 4 = 32$

GLOBÁLNÍ MINIMUM: $[0,0]$

GLOBÁLNÍ MAXIMUM: $[-2,4]$, $[2,4]$