

## BAA009 Matematika II pro obor Geodézie a kartografie

### 1. Pojem primitivní funkce. Vlastnosti neurčitého integrálu. Integrační metody pro neurčitý integrál.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

## Základní literatura

- Daněček, Josef – Dlouhý, Oldřich – Příbyl, Oto: *Matematika I, Modul 7, Neurčitý integrál*, Fakulta stavební VUT, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2007.

- Vítovec, Jiří: *Integrální počet - I. část (neurčitý integrál a základní integrační metody)*, Přednášky z Matematiky, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, Brno.
- Krupková, Vlasta – Fuchs, Petr: *Matematika 1 (Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika)*, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, Brno 2014. <http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/vystupy.php>
- Schwarz, Rudolf: *BA002 (BAA002) – Matematika 2 (Environmentálně vyspělé budovy)*, Materiály z matematiky a deskriptivní geometrie pro samostatné studium, Fakulta stavební VUT, Brno. <http://rschwarz.wz.cz/fast/Mat2/BA002.htm>

## Základní vzorce na integrování

- ✓  $\int k \, dx = kx + c,$
- ✓  $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1,$
- ✓  $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c, x \neq 0,$
- ✓  $\int e^x \, dx = e^x + c,$
- ✓  $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1,$
- ✓  $\int \sin x \, dx = -\cos x + c,$
- ✓  $\int \cos x \, dx = \sin x + c,$

- ✓  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c, x \neq (2k + 1)\frac{1}{2}\pi,$
- ✓  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c, x \neq k\pi,$
- ✓  $\int \frac{1}{x^2 + A^2} dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + c,$
- ✓  $\int \frac{1}{x^2 - A^2} dx = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{x - A}{x + A} \right| + c, A > 0, |x| \neq A,$
- ✓  $\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{A} + c, A > 0, |x| < A,$
- ✓  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c, B \neq 0,$

- ✓  $\int \sinh x dx = \cosh x + c,$
- ✓  $\int \cosh x dx = \sinh x + c,$
- ✓  $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \operatorname{tgh} x + c,$
- ✓  $\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\operatorname{cotgh} x + c,$

$$✓ \int cf(x) dx = c \int f(x) dx,$$

$$✓ \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$✓ \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c,$$

$$✓ \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c.$$

• • •

## Věta (Metoda per partes)

Nechť funkce  $u, v$  mají spojité derivace na otevřeném intervalu  $I$ . Potom na  $I$  platí

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx,$$

jestliže integrály na pravé straně rovnosti existují.

**Důkaz:** Věta o integraci per partes plyne ze vzorce pro derivaci součinu.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$uv' = (uv)' - u'v$$

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

Metoda per partes (po částech) částečně nahrazuje chybějící pravidlo pro integraci součinu. Nejčastěji se jedná o součin polynomu  $P(x)$  a jiné elementární funkce, tj. např. (pro libovolné  $a, b \in \mathbb{R}$ ):

$$\int P(x)e^{ax} dx, \int P(x) \sin(ax) dx, \int P(x) \cos(ax) dx,$$

$$\int P(x) \ln x dx, \int P(x) \operatorname{arctg} x dx, \int e^{ax} \cos(bx) dx \dots$$

## Poznámka

- Jako funkci  $u$ , tedy  $tu$ , kterou derivujeme, volíme zpravidla takovou funkci, jež se při derivování „vylepší“.
- Necht'  $P_n(x)$  je polynom stupně  $n$ ,  $a \in \mathbb{R}$  a integrujeme součin

$$\int P_n(x)f(x) dx.$$

- (i) Je-li  $f(x)$  funkce  $e^{ax}$ ,  $\sin(ax)$ ,  $\cos(ax)$ , pak volíme  $u = P_n(x)$ .
- (ii) Je-li  $f(x)$  funkce  $\ln x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arccotg} x$ , pak volíme  $u = f(x)$  a to i v případě, že  $P_n(x) = 1$ .
- Metodu per partes lze i použít opakovaně. V případě (i) je nutné ji použít dokonce  $n$  krát.

## Příklad 1.4.1

Vypočtete integrály

- (i)  $\int xe^x dx$ ,
- (ii)  $\int \ln x dx$ ,
- (iii)  $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ ,
- (iv)  $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$ ,

## Příklad 1.4.2

Vypočtete integrál

$$\int e^x \sin x \, dx.$$

Analogickým způsobem lze počítat integrály

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx, \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

na  $\mathbb{R}$ , kde  $a, b$  jsou libovolné reálné konstanty.

## Příklad 1.4.3

Kombinací substituční metody a metody per partes vypočítejte integrály

(i)  $\int x^5 e^{x^2} \, dx,$

(ii)  $\int \operatorname{arctg} x \, dx.$

# Děkuji za pozornost!

