FACULTY OF CIVIL ENGINEERING institute of mathematics and descriptive geometry

BAA009 Matematika II pro obor Geodézie a kartografie

3. Integrace vybraných typů iracionálních funkcí.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

FCE

- Daněček, Josef – Dlouhý, Oldřich – Přibyl, Oto: *Matematika I, Modul 7, Neurčitý integrál*, Fakulta stavební VUT, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2007.

Doporučené materiály

- Vítovec, Jiří: *Integrální počet - II. část (další integrační postupy pro některé typy funkcí)*, Přednášky z Matematiky, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, Brno.
- Krupková, Vlasta – Fuchs, Petr: *Matematika 1 (Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika)*, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, Brno 2014. http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/vystupy.php
- Schwarz, Rudolf: *BA002 (BAA002) – Matematika 2 (Environmentálně vyspělé budovy)*, Materiály z matematiky a deskriptivní geometrie pro samostatné studium, Fakulta stavební VUT, Brno. http://rschwarz.wz.cz/fast/Mat2/BA002.htm

Integrace iracionálních funkcí

Typ $\int R(x, \sqrt[n_1]{x}, \sqrt[n_2]{x}, \ldots, \sqrt[n_k]{x})\,\mathrm{d}x$

Je-li integrant typu $R(x, \sqrt[n_1]{x}, \sqrt[n_2]{x}, \ldots, \sqrt[n_k]{x})$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, pak volíme substituci

$$x = t^s, \qquad t = \sqrt[s]{x},$$

kde s je nejmenším společným násobkem čísel $n_1, \ldots, n_k$. Tím převedeme integrál z iracionální funkce na integrál z racionální lomené funkce.

Typ $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$

Je-li integrant typu $R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pro která $ad - bc \neq 0$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, pak volíme substituci

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s \Longrightarrow x = \frac{dt^s - b}{a - ct^s}, \qquad t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

kde s je nejmenším společným násobkem čísel $n_1, \dots, n_k$. Tím převedeme integrál z iracionální funkce na integrál z racionální lomené funkce.

Příklad 3.1

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3.2

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x\sqrt[4]{x} + x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Typ $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x$

Je-li integrant typu $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, kde $R(u,v) = \dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ je racionální funkce dvou proměnných u, v, $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$. Uvažujme integrál

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Pokud má polynom ax^2+bx+c

(i) dvojnásobný reálný kořen, pak jde o integraci racionální funkce;

(ii) dva různé reálné kořeny, pak můžeme převést integrál na integrál typu $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ a volíme substituci $t = \sqrt{a\dfrac{x-x_1}{x-x_2}}$;

(iii) komplexní kořeny, pak použijeme tzv. *Eulerovy substituce.*

- Pokud $a > 0$ volíme substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t.$$

Po umocnění obou stran rovnosti se ruší členy ax^2.

- Pokud $c > 0$ volíme substituci

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}.$$

Po umocnění obou stran rovnosti se ruší členy c a poté lze celou rovnost dělit x.

Eulerovy substituce převedou $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) \, \mathrm{d}x$ na integrál racionální funkce. Při praktickém počítání však vzniklé racionální funkce bývají dost složité a jejich rozklady na parciální zlomky obsahují mnoho členů. Proto bývá v některých případech výhodnější použít některou z následujících substitucí, kde R je opět racionální funkce dvou proměnných.

- Je-li integrant typu $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$, pak volíme substituci

$$x = a \sin t, \qquad x = a \cos t \qquad \text{nebo} \qquad x = a \operatorname{tgh} t.$$

- Je-li integrant typu $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$, pak volíme substituci

$$x = \frac{a}{\sin t}, \qquad x = \frac{a}{\cos t} \qquad \text{nebo} \qquad x = \cosh t.$$

- Je-li integrant typu $R(x, \sqrt{x^2 + a^2})$, pak volíme substituci

$$x = a \operatorname{tg} t, \qquad x = a \operatorname{cotg} t \qquad \text{nebo} \qquad x = a \sinh t.$$

Poznámka

Integrály typu

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x,$$

kde $A, B, a, b, c, \in \mathbb{R}, A \neq 0, a \neq 0$, lze řešit výhodně tak, že je převedeme na součet integrálů

$$K\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x + L\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x,$$

které již snadno vypočítáme.

Příklad 3.3

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3.4

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3.5

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3.6

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3.7

Vypočtěte integrál

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3.8

Vypočtěte integrál

$$\int x\sqrt{1-4x-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3.5

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{x^5}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Děkuji za pozornost!