FACULTY OF CIVIL ENGINEERING institute of mathematics and descriptive geometry

BAA009 Matematika 2 (G)

8. Lokální extrémy funkce dvou proměnných. Absolutní extrémy funkce.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

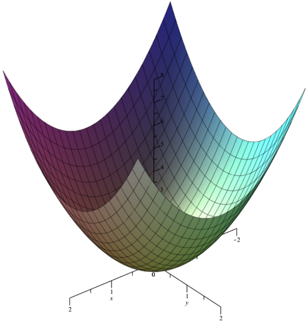
- Dlouhý, O. – Tryhuk, V.: *Matematika I – Diferenciální počet funkcí více reálných promennch*, CERM, FAST VUT Brno 2004. ISBN: 80-214-2776-0

Definice

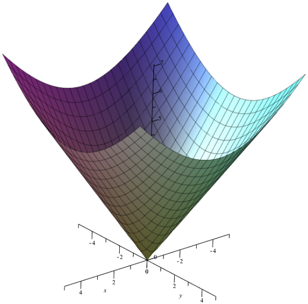
Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0] \in D(f)$ **lokální maximum** (resp. **minimum**), když existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0, y_0)$ takové, že pro všechny body $[x, y] \in \mathcal{P}(x_0, y_0)$ platí podmínka $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$). Je-li v podmínce ostrá nerovnost $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) > f(x_0, y_0)$), hovoříme o **ostrém lokálním maximu** (resp. **ostrém lokálním minimu**) funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.

Lokální minima a lokální maxima funkce souhrně nazýváme **lokálními extrémy funkce**.

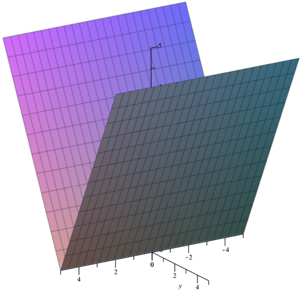
Lokální extrémy funkce dvou proměnných



$$z = x^2 + y^2$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = |y|$$

Lokální extrémy funkce dvou proměnných

Definice

Bod $A = [x_0, y_0] \in D(f)$ nazveme **stacionárním bodem funkce** f, jestliže v něm existují parciální derivace f'_x, f'_y a platí $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Nutná podmínka existence lokálního extrému:

Tvrzení

Nechť má funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0] \in D(f)$ lokální extrém. Pak je bod $[x_0, y_0]$ stacionárním bodem funkce f, nebo alespoň jedna z parciálních derivací $f'_x(A)$, $f'_y(A)$ neexistuje.

Postačující podmínka existence lokálního extrému:

Tvrzení

Buď $A = [x_0, y_0]$ stacionárním bodem funkce $z = f(x_0, y_0)$ a nechť existují spojité parciální derivace druhého řádu finkce f v bodě A. Označme

$$D(X) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(X) & f''_{xy}(X) \\ f''_{yx}(X) & f''_{yy}(X) \end{vmatrix}$$

determinant tvořený z parciálních derivací druhého řádu funkce f.

Lokální extrémy funkce dvou proměnných

Tvrzení (pokračování)

Pak platí:

a) Je-li $D(A) > 0$, pak má funkce f v bodě A lokální extrém, a to

   (i) ostré lokální maximum, je-li $f''_{xx}(A) < 0$,

   (ii) ostré lokální minimum, je-li $f''_{xx}(A) > 0$.

b) Je-li $D(A) < 0$, pak nemá funkce f v bodě A lokální extrém.

c) Je-li $D(A) = 0$, pak funkce f v bodě A lokální extrém mít může, ale nemusí.

Lokální extrémy funkce dvou proměnných

Příklad 8.1

Vypočtěte lokální extrémy funkce $f : z = x^2 + y^2 + 2x + 6y + 3$.

Příklad 8.2

Vypočtěte lokální extrémy funkce $f(x, y) = (x - 2y)e^{xy}$.

Absolutní extrémy funkce

Definice

Absolutním maximem (minimem) funkce $f : z = f(x, y)$ na množině $M \subset D(f)$ nazýváme největší (nejmenší) funkční hodnotu funkce f (pokud existuje) na množině M.

Z Weierstrassovy věty lze odvodit, že absolutní extrémy mohou nastat

a) buď ve vnitřních bodech množiny M, které jsou stacionárními body funkce f,

b) nebo na hranici ∂M množiny M.

Extrémy funkce f jsou na hranici ∂M vázány podmínkami tvaru $F(x, y) = 0$ a budeme hovořit o *vázaných extrémech* funkce f. Úlohu lze zobecnit pro více proměnných.

Komentář

Podmínku $F(x, y) = 0$ lze často do našich výpočtů zahrnout pomocí parametrizace $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t \in \langle\alpha, \beta\rangle$) tak, že $F(x(t), y(t)) \equiv 0$ je splněna identicky a funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ se pro body splňující podmínku $F(x, y) = 0$ změní ve funkci jedné proměnné $z(t) = f(x(t), y(t))$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, pro kterou umíme úlohu extrémů funkce řešit.

Absolutní extrémy funkce

Při hledání absolutních extrémů funkce dvou proměnných si můžeme výpočet zjednodušit. Stačí si uvědomit, že postačuje porovnání funkčních hodnot

a) ve stacionárních bodech ležících uvnitř kompaktní množiny M,

b) ve stacionárních bodech na její hranici ∂M,

c) ve společných bodech jednotlivých částí hranice (v nichž se mění jejich rovnice).

Příklad 8.3

Určete globální (absolutní) extrémy, tedy největší a nejmenší hodnotu funkce: $f(x, y) : z = xy - x^2 - y^2 + x + y$ v trojúhelníku tvořeném souřadnými osami a přímkou $p : x + y = 4$.

Příklad 8.4

Najděte globální extrémy funkce f na množině $\mathcal{M}$: $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $\mathcal{M} = \{[x, y] : |x| + |y| \leq 1\}$.

Komentář

Při splnění podmínek pro existenci funkce dané implicitně lze z podmínky $F(x, y, z) = 0$ vyjádřit některou z proměnných jako funkci proměnných zbývajících, například $z = z(x, y)$. Úloha nalezení extrémů funkce $u = f(x, y, z)$ se pak změní v úlohu hledání extrémů funkce $u = f(x, y, z(x, y)) = u(x, y)$ dvou proměnných, kde $[x, y] \in M$, resp. $[x, y] \in \overline{M}$ uzávěru oblasti $M \subset \mathbb{E})_2$.

Příklad 8.5

Vodní nádrž tvaru kvádru má objem $32\ m^3$. Najděte rozměry nádrže takové, aby měl nátěr stěn nádrže nejmenší spotřebu barvy.

Děkuji za pozornost!