

BAA009 Matematika 2 (G)

8. Lokální extrémy funkce dvou proměnných.

Absolutní extrémy funkce.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

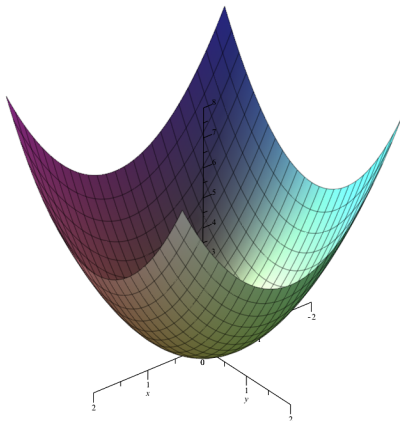
- Dlouhý, O. – Tryhuk, V.: *Matematika I – Diferenciální počet funkcí více reálných proměnných*, CERM, FAST VUT Brno 2004. ISBN: 80-214-2776-0

Definice

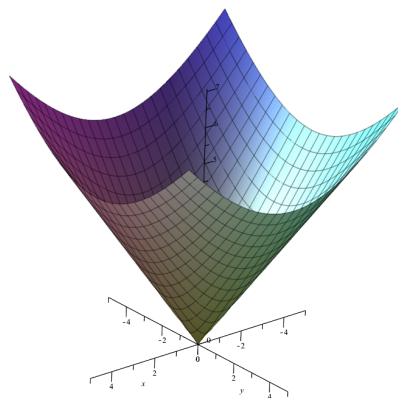
Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0] \in D(f)$ **lokální maximum** (resp. **minimum**), když existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0, y_0)$ takové, že pro všechny body $[x, y] \in \mathcal{P}(x_0, y_0)$ platí podmínka $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$). Je-li v podmínce ostrá nerovnost $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) > f(x_0, y_0)$), hovoříme o **ostrém lokálním maximu** (resp. **ostrém lokálním minimu**) funkce f v bodě $[x_0, y_0]$.

Lokální minima a lokální maxima funkce souhrně nazýváme **lokálními extrémů funkce**.

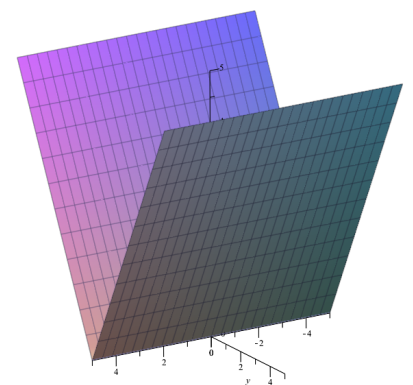
Lokální extrémů funkce dvou proměnných



$$z = x^2 + y^2$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = |y|$$

Definice

Bod $A = [x_0, y_0] \in D(f)$ nazveme **stacionárním bodem funkce f** , jestliže v něm existují parciální derivace f'_x, f'_y a platí $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Nutná podmínka existence lokálního extrému:

Tvrzení

Nechť má funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0] \in D(f)$ lokální extrém. Pak je bod $[x_0, y_0]$ stacionárním bodem funkce f , nebo alespoň jedna z parciálních derivací $f'_x(A), f'_y(A)$ neexistuje.

Postačující podmínka existence lokálního extrému:

Tvrzení

Bud' $A = [x_0, y_0]$ stacionárním bodem funkce $z = f(x_0, y_0)$ a necht' existují spojité parciální derivace druhého řádu funkce f v bodě A . Označme

$$D(X) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(X) & f''_{xy}(X) \\ f''_{yx}(X) & f''_{yy}(X) \end{vmatrix}$$

determinant tvořený z parciálních derivací druhého řádu funkce f .

Tvrzení (pokračování)

Pak platí:

- a) Je-li $D(A) > 0$, pak má funkce f v bodě A lokální extrém, a to
 - (i) ostré lokální maximum, je-li $f''_{xx}(A) < 0$,
 - (ii) ostré lokální minimum, je-li $f''_{xx}(A) > 0$.
- b) Je-li $D(A) < 0$, pak nemá funkce f v bodě A lokální extrém.
- c) Je-li $D(A) = 0$, pak funkce f v bodě A lokální extrém mít může, ale nemusí.

Příklad 8.1

Vypočtete lokální extrémy funkce $f : z = x^2 + y^2 + 2x + 6y + 3$.

Příklad 8.2

Vypočtete lokální extrémy funkce $f(x, y) = (x - 2y)e^{xy}$.

Definice

Absolutním maximem (minimem) funkce $f : z = f(x, y)$ na množině $M \subset D(f)$ nazýváme největší (nejmenší) funkční hodnotu funkce f (pokud existuje) na množině M .

Z Weierstrassovy věty lze odvodit, že absolutní extrémů mohou nastat

- a) buď ve vnitřních bodech množiny M , které jsou stacionárními body funkce f ,
- b) nebo na hranici ∂M množiny M .

Extrémů funkce f jsou na hranici ∂M vázány podmínkami tvaru $F(x, y) = 0$ a budeme hovořit o *vázaných extrémů* funkce f . Úlohu lze zobecnit pro více proměnných.

Komentář

Podmínku $F(x, y) = 0$ lze často do našich výpočtů zahrnout pomocí parametrizace $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t \in \langle \alpha, \beta \rangle$) tak, že $F(x(t), y(t)) \equiv 0$ je splněna identicky a funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ se pro body splňující podmínku $F(x, y) = 0$ změní ve funkci jedné proměnné $z(t) = f(x(t), y(t))$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pro kterou umíme úlohu extrémů funkce řešit.

Při hledání absolutních extrémů funkce dvou proměnných si můžeme výpočet zjednodušit. Stačí si uvědomit, že postačuje porovnání funkčních hodnot

- a) ve stacionárních bodech ležících uvnitř kompaktní množiny M ,
- b) ve stacionárních bodech na její hranici ∂M ,
- c) ve společných bodech jednotlivých částí hranice (v nichž se mění jejich rovnice).

Příklad 8.3

Určete globální (absolutní) extrémů, tedy největší a nejmenší hodnotu funkce: $f(x, y) : z = xy - x^2 - y^2 + x + y$ v trojúhelníku tvořeném souřadnými osami a přímkou $p : x + y = 4$.

Příklad 8.4

Najděte globální extrémů funkce f na množině \mathcal{M} : $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $\mathcal{M} = \{[x, y] : |x| + |y| \leq 1\}$.

Komentář

Při splnění podmínek pro existenci funkce dané implicitně lze z podmínky $F(x, y, z) = 0$ vyjádřit některou z proměnných jako funkci proměnných zbývajících, například $z = z(x, y)$. Úloha nalezení extrémů funkce $u = f(x, y, z)$ se pak změní v úlohu hledání extrémů funkce $u = f(x, y, z(x, y)) = u(x, y)$ dvou proměnných, kde $[x, y] \in M$, resp. $[x, y] \in \overline{M}$ uzávěru oblasti $M \subset \mathbb{E}_2$.

Lokální extrémů funkce dvou proměnných

Příklad 8.5

Vodní nádrž tvaru kvádrů má objem 32 m^3 . Najděte rozměry nádrže takové, aby měl nátěr stěn nádrže nejmenší spotřebu barvy.

Děkuji za pozornost!

