

Příklad Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

- i) Sarrusovým pravidlem,
- ii) rozvojem podle 2. sloupce,
- iii) užitím elementárních úprav.

$$i) \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 6 & 1 \end{matrix} = 0 + 90 + (-8) - (0 + 6 - 35) = \underline{\underline{111}}$$

- - - + + +

$$ii) \begin{vmatrix} 2 & \textcircled{5} & 8 \\ -1 & \textcircled{0} & 3 \\ 6 & \textcircled{1} & 7 \end{vmatrix} = 5(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

↑ LR

$$= -5(-7 - 18) - 1 \cdot (6 + 8) = \underline{\underline{111}}$$

$$iii) \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-3) \\ 2 \cdot 4 \\ 1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 14 \\ 0 & -14 & -17 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 14 \\ 5 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 111 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 111 = \underline{\underline{111}}$$

Příklad Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1) \cdot (-3)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -10 & -3 \\ 0 & 9 & -5 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{=1} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & -10 & -3 \\ 9 & -5 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{=1} = \\ & \downarrow LR \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 14 & 2 & 0 \\ 4 & -9 & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{1 \cdot (-1)^{1+3}}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} = 14 \cdot (-9) - 2 \cdot 4 = \underline{\underline{-134}} \end{aligned}$$

Příklad Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1) \\ (-3)}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot (-18) = \underline{\underline{36}}$$

Příklad Bez přímého výpočtu dokažte, že platí:

$$\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & x \\ 1 & 2 & b & x \\ 1 & 3 & c & x \\ 1 & 4 & d & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 1 & a & x \\ 2b & 2 & b & x \\ 2c & 3 & c & x \\ 2d & 4 & d & x \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

↑ $\cdot x$ ↑ $= 0$
↑ $\cdot 2$ ↑ $= 0$

Příklad Bez přímého výpočtu dokažte, že platí:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

SUBSTITUCE: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |\vec{b}+\vec{c} \quad \vec{c}+\vec{a} \quad \vec{a}+\vec{b}| &= |\vec{b} \quad \vec{c}+\vec{a} \quad \vec{a}+\vec{b}| + |\vec{c} \quad \vec{c}+\vec{a} \quad \vec{a}+\vec{b}| = \\ &= |\vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{a}+\vec{b}| + |\vec{b} \quad \vec{a} \quad \vec{a}+\vec{b}| + |\vec{c} \quad \vec{c} \quad \vec{a}+\vec{b}| + |\vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{a}+\vec{b}| = \\ &= |\vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{a}| + |\vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{b}| + |\vec{b} \quad \vec{a} \quad \vec{a}| + |\vec{b} \quad \vec{a} \quad \vec{b}| + |\vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{a}| + \\ &\quad + |\vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{b}| = \overset{\Rightarrow=0}{|\vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{a}|} + \overset{\Rightarrow=0}{|\vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{b}|} + \overset{\Rightarrow=0}{|\vec{b} \quad \vec{a} \quad \vec{a}|} + \overset{\Rightarrow=0}{|\vec{b} \quad \vec{a} \quad \vec{b}|} + \overset{\Rightarrow=0}{|\vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{a}|} + \\ &= |\vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{b}| = \overset{\Rightarrow=0}{|\vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{a}|} + \overset{\Rightarrow=0}{|\vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{b}|} = |\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}| + |\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}| = \\ &= 2 |\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}| \end{aligned}$$

Příklad Výpočtěte determinant:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & a^2+4a+4 & a^2+6a+9 \\ b^2 & b^2+2b+1 & b^2+4b+4 & b^2+6b+9 \\ c^2 & c^2+2c+1 & c^2+4c+4 & c^2+6c+9 \\ d^2 & d^2+2d+1 & d^2+4d+4 & d^2+6d+9 \end{vmatrix} =$$

$(-1) \xrightarrow{\text{red}} \xrightarrow{\text{blue}} \xrightarrow{\text{green}} +$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$(-2) \xrightarrow{\text{blue}} \xrightarrow{\text{green}} +$
 $(-3) \xrightarrow{\text{green}} +$