Vysoké učení technické v Brně **Stavební fakulta**

ÚSTAV MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Matematika 0A1

Cvičení, zimní semestr

DOMÁCÍ ÚLOHY

Jan Šafařík

Brno

(1) Určete rovnici kručnice o poloměru r, procházející počátkem, jestliže $S[3;2]$.

[$(x-3)^2+(y-2)^2=13$]

(2) Znázorněte parabolu $x^2-10x-9y+61=0$.

[$(x-5)^2=9(y-4)$]

(3) Znázorněte množinu $x^2-4x+4y\le 0$, $x^2-4x+y^2\le 0$.

[$(x-2)^2\le -4(y-1)$, $(x-2)^2+y^2\le 2^2$]

(4) Zjednodušte výraz $\frac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x}$.

[$\operatorname{tg} x$, $\cos x\ne -\frac{1}{2}$, $x\ne \frac{\pi}{2}+k\pi$]

(5) Jsou dány matice $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}$. Vypočtěte matici $AB-BA$.

[$AB-BA=\begin{pmatrix}-10&-4&-7\\6&14&4\\-7&5&-4\end{pmatrix}$]

(6) Určete hodnost matice $A=\begin{pmatrix}3&2&1&-1\\2&1&0&0\\0&1&-3&2\\-2&0&3&0\end{pmatrix}$

[$h(A)=4$]

(7) Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 &+& 2x_2 &-& x_3 &-& 2x_4 &=& -2\\ 2x_1 &+& x_2 &+& x_3 &+& x_4 &=& 8\\ x_1 &-& x_2 &-& x_3 &+& x_4 &=& 1\\ x_1 &+& 2x_2 &+& 2x_3 &-& x_4 &=& 4 \end{array}$$

[$(1;2;1;3)$]

(8) Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 13 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}$$

[$(t+5; 2/3; -t-1; 2t-1/3), t \in \mathbb{R}$]

(9) Vypočtěte determinant $A = \begin{vmatrix} \sin x & 1 & \cos x \\ \sin y & 1 & \cos y \\ \sin z & 1 & \cos z \end{vmatrix}$.

[$\sin(x-z) + \sin(z-y) + \sin(y-x)$]

(10) Vypočtěte Vandermondův determinant $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\ 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \end{vmatrix}$.

[288]

NP Pomocí determinantů vypočítejte hodnost matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & -10 \\ -3 & -9 & 6 & 15 \\ 5 & 15 & -10 & -25 \end{pmatrix}$.

[$h(A) = 1$]

(11) Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrccr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & = & 31 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & = & 29 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & = & 10 \end{array}$$

[$(3; 4; 5)$]

(12) Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Spočtěte A^{-1}, B^{-1}, $B^{-1} \cdot A^{-1}$, $(A \cdot B)^{-1}$.

[$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{13}{3} \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (AB)^{-1}$,

$A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{13}{3} \\ -\frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{8}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (BA)^{-1}$]

NP Pomocí determinantů spočtěte inverzní matice k následujícím maticím:

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

[$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, B^{-1} neexistuje, $C^{-1} = \frac{1}{156}\begin{pmatrix} 9 & 13 & 25 \\ 18 & -26 & -2 \\ 3 & 39 & -9 \end{pmatrix}$]

(13) Spočtěte inverzní matici A^{-1} k matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Použijte výpočet pomocí **adjungované matice** k matici A – $adj A$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj A$$

[$A^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -12 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & -6 \\ 8 & 2 & -3 \end{pmatrix}$]

(14) Řešte maticovou rovnici $A^2 \cdot X + B = C$ pro neznámou X, jestliže
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A^2 \cdot X + B &= C && / \ -B \text{ zprava} \\ A^2 \cdot X &= C - B && / \ \cdot A^{-1} \text{ zleva} \\ X &= (A^2)^{-1} \cdot (C - B) \end{aligned}$$

[$X = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$]

(15) Řešte maticovou rovnici $A \cdot X \cdot A = B$ pro neznámou X, jestliže
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -5 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A \cdot X \cdot A &= B && / \cdot A^{-1} \text{ zleva} \\ X \cdot A &= A^{-1} \cdot B && / \cdot A^{-1} \text{ zprava} \\ X &= A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

[$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$]

(16) Zjistěte zda jsou dané vektory lineárně závislé: $\vec{a}(1;1;-5)$, $\vec{b}(-3;-3;1)$, $\vec{c}(0;1;2)$, $\vec{d}(5;6;7)$.

[jsou lineárně závislé]

(17) Vektor $\vec{c}(3;2;1)$ vyjádřete jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}_1(1;1;3)$, $\vec{u}_2(2;1;-2)$, $\vec{u}_3(4;2;1)$.

[$\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$]

(18) Určete všechna vlastní čísla (spektrum) a všechny vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

[$\lambda_{1,2,3,4} = 2$, $(u-v; u-v; v; u)^T$]

(19) Určete všechna vlastní čísla (spektrum) a všechny vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[$\lambda_{1,2} = 0$, $(0; s; 0; s)^T$; $\lambda_{3,4} = 2$, $(t; 0; 0; t)^T$]

(20) Určete zda následující matice z vektorového prostoru $V = Mat_{3,3}(\mathbb{R})$ jsou lineárně závislé nebo lineárně nezávislé:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[jsou lineárně závislé]

(21) Určete objem rovnoběžnostěnu s vrcholy dolní podstavy $A[3;4;0]$, $B[9;5;-1]$, $C[1;7;1]$, jestliže krajní bod hrany AE je $E[3;2;5]$.

[$V = |[\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}]| = 108$]

NP Jsou dány body $A[1;1;4]$, $B[4;2;2]$, $C[1;2;6]$. Určete jednotkový vektor $\vec{v}^0$ kolmý k vektorům $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

[$\vec{v}^0_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{61}}(4\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k})$]

(22) Vypočtěte objem čtyřstěnu s vrcholy $A[1;-5;4]$, $B[0;3;1]$, $C[-2;-4;3]$, $D[-4;4;-2;]$ a vzdálenost v vrcholu A od stěny BCD.

[$V = \dfrac{41}{6}, v = \dfrac{41}{\sqrt{1457}}$]

(23) Napište obecnou rovnici roviny procházející bodem $A[23;3;-4]$ a přímkou p.

$$p = \begin{cases} x = 8 - 2t \\ y = 5t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$$

[$7x - 62y - 81z - 299 = 0$]

(24) Je dána rovina $\sigma : 22x - 43y - 17z = 0$, rovina $\omega : -2x + 3y + z + 5 = 0$ a rovina α určená body $A[1;3;0]$, $B[2;2;1]$, $C[4;12;-1]$. Vypočítejte úhel společných přímek rovin σ, ω a rovin σ, α.

[$90°$]

(25) Určete sudost, lichost funkce f.

a)	$y = x^2$	[funkce je sudá]
b)	$y = \frac{1}{x}$	[funkce je lichá]
c)	$y = 2x - 1$	[funkce není sudá, ani lichá]

(26) Nakreslete graf funkce $y = f(x)$, jestliže

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty; -1) \\ x^2 & x \in \langle -1; 1 \rangle \\ 3 - 2x & x \in (1.5; 2 \rangle \end{cases}$
b) $y = 3 \sin x$
c) $y = \sin 2x$
d) $y = -3 \sin(x + 3\pi)$
e) $y = -2 \sin(\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}\pi)$
f) $y = -\sin(x + 3\pi)$

(27) Určete definiční obor dané funkce $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$ a načrtněte jej.

[$Dz = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 : -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$]

(28) Pomocí Hornerova schematu určete funkční hodnotu polynomu f v bodě x_0.

a) $f : y = x^3 - 3x^2 - 3x - 5,\ x_0 = 2$ [-15]
b) $f : y = x^5 - 3x^4 + 7x^2 + 2,\ x_0 = 2$ [14]

(29) Ukažte, že číslo $x_0 = -2$ je dvojnásobným kořenem polynomu $f : y = x^3 + 3x^2 - 4$.

(30) Najděte všechny reálné kořeny polynomu f.

a) $f : y = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$ [$1, 1, 1, 2, -2$]
b) $f : y = x^5 + 6x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 10x - 3$ [$1, -1, -3, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$]
c) $f : y = 3x^4 + 2x^3 - 28x^2 - 18x + 9$ [$\frac{1}{3}, -1, 3, -3$]

(31) Vyjádřete racionální funkci jako součet polynomu a ryzí racionální funkce.

a) $f : y = \dfrac{2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}$ [$= 2x^2 - 3 + \dfrac{x^2 - x + 1}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}$]

b) $f : y = \dfrac{4 - x^3}{4x^3 + 7x^2 - 2x}$ [$= -\dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{\frac{85}{12}}{4x - 1} + \dfrac{\frac{2}{3}}{x + 2}$]

c) $\dfrac{x + 2}{x^3 - 2x^2}$, [$= -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x - 2}$]

(32) Napište tvar rozkladu funkce f v součet parciálních zlomků.

a) $f : y = \dfrac{x^2+4x-18}{(x-1)^3x^8(x^2+1)^2}$

$[\ f : y = \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{(x-1)^2} + \dfrac{A_3}{(x-1)^3} + \dfrac{B_1}{x} + \dfrac{B_2}{x^2} + \dfrac{B_3}{x^3} + \dfrac{B_4}{x^4} + \dfrac{B_5}{x^5} + \dfrac{B_6}{x^6} + \dfrac{B_7}{x^7} +$
$\dfrac{B_8}{x^8} + \dfrac{C_1x+D_1}{x^2+1} + \dfrac{C_2x+D_2}{(x^2+1)^2} + \dfrac{C_3x+D_3}{(x^2+1)^3} = \dfrac{x^2+4x-18}{(x-1)^3x^8(x^2+1)^2}\ ]$

b) $f : y = \dfrac{3x^4+2x}{(x^2+1)^2(3x+1)^2x^3}$

$[\ f : y = \dfrac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \dfrac{A_2x+B_3}{(x^2+1)^2} + \dfrac{C_1}{3x+1} + \dfrac{C_2}{(3x+1)^2} + \dfrac{D_1}{x} + \dfrac{D_2}{x^2} + \dfrac{D_3}{x^3}\ ]$

(33) Rozložte racionální funkci v součet polynomu a parciálních zlomků.

a) $f : y = \dfrac{4x^2+9x-1}{x^3+2x^2-x-2}$ $[= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x+2}]$

b) $f : y = \dfrac{2x^3-2x^2+5}{x^2-2x}$ $[= 2x + 2 - \frac{5}{2}\frac{1}{x} + \frac{13}{2}\frac{1}{x-2}]$

(34) Vypočtěte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^5-3x+2}$ $[\ 0\ ]$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ $[\ \dfrac{3}{2}\ ]$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{|4-x|}{x-4}$ [neexistuje, $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{|4-x|}{x-4} = 1,\ \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{|4-x|}{x-4} = -1$]

(35) Vypočtěte limity složených funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to\pi/12} \ln \sin^3 2x$ $[\ -\ln 8\ ]$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ $[\ -\frac{\pi}{2}\ ]$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$ $[\ \frac{1}{4}\ ]$

(36) Vypočtěte limity typu $\frac{k}{0}$:

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x-1}{9-x^2}$ $[\ -\infty\ ]$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x+1}{\sin x}$ $[\,-\infty\,]$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\sin x}$ [neexistuje, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cos x}{\sin x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{\sin x} = \infty$]

(37) Vypočtěte limity v nevlastním bodě:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x+4}{2x^4-3x^3-1}$ $[\,0\,]$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^6+2x^4-x}{4x^3-x}$ $[\,-\infty\,]$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{arctg} \dfrac{x^2}{x^2+4}$ $[\,\infty\,]$

(38) S použitím definice derivace určete derivaci $f'(x)$ funkcí:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $[\,\mathcal{D}(f) = \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}},\ \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} - \{0\}\,]$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{3x^2}$ $[\,\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\},\ f'(x) = \dfrac{2-4}{3x^3},\ \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)\,]$

(39) Určete derivaci $f'(x)$ a definiční obory $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{D}(f')$ funkcí:

a) $f(x) = \dfrac{4x^7+3x^5-2x^4+7x-2}{3x^4}$

$[\,\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\},\ f'(x) = \dfrac{12x^7+3x^5-21x+8}{3x^5},\ \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)\,]$

b) $f(x) = (x^3+8)(x-2)$ $[\,\mathcal{D}(f) = \mathbb{R},\ f'(x) = 4x^3-6x^2+8,\ \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)\,]$

c) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ $[\,\mathcal{D}(f) = \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2},\ \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)\,]$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\log(3x^2+x+1)}$

$[\,\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0, -\frac{1}{3}\},\ f'(x) = \dfrac{6x+1}{(3x^2+x+1)\ln 10 \log^2(3x^2+x+1)},\ \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)\,]$

(40) Určete první a druhou derivaci $f'(x)$, $f''(x)$ a příslušné definiční obory funkcí:

a) $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$

$[\,f'(x) = \dfrac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}},\ f''(x) = \dfrac{x(2x^2+9)}{\sqrt{(x^2+3)^3}},\ \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f'') = \mathbb{R}\,]$

b) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

[$f'(x) = -\dfrac{1}{\cos x}$, $f''(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f'') = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$]

(41) Určete druhou derivaci $f''(x)$ a příslušné definiční obory funkcí:

a) $f(x) = x(\ln x - 1)$ [$f''(x) = \dfrac{1}{x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f'') = (0, \infty)$]

b) $f(x) = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{x^2+1})$ [$f''(x) = -\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f'') = \mathbb{R}$]

(42) Najděte rovnici tečny t a normály n ke grafu funkce $y = f(x)$:

a) $f(x) = e^{-x}\cos 2x$ v bodě $A = [0, ?]$ [$t : x + y - 1 = 0$, $n : x - y + 1 = 0$]

b) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + 1$, je-li t rovnoběžná s přímkou $x - 2y + 1 = 0$
[$t : x - 2y + 3 = 0$, $n : 4x + 2y - 3 = 0$]

(43) Najděte přírůstek funkce Δf a diferenciál df v čísle x_0 pro přírůstek Δx:

$f(x) = \operatorname{arccotg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.2$ [$\Delta f = -0.09$; $df(x_0) = -0.1$]

(44) Vypočítejte diferenciál funkce df v bodě x pro přírůstek h:

$4x^2 + \sqrt[3]{x}$ [$df(x) = \dfrac{24x\sqrt[3]{x^2}+1}{3\sqrt[3]{x^2}}h$]

(45) Napište následující funkce užitím MacLaurinova polynomu n-tého stupně:

a) $f(x) = \ln(\cos x)$, $n = 6$ [$T_6(x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45}$]

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $n = 4$ [$T_4(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{5}{128}x^4$]

(46) Napište následující funkce užitím Taylorova polynomu n-tého stupně v okolí bodu x_0:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$, $n = 3$ [$T_3(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x-2}{4} + \dfrac{(x-2)^2}{8} - \dfrac{(x-2)^3}{16}$]

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 1$, $n = 3$ [$T_3(x) = 1 + \dfrac{2(x-1)}{3} - \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{4(x-1)^3}{81}$]

(47) Vypočítejte přibližně následující funkční hodnotu pomocí Taylorova polynomu n-tého stupně T_n v okolí x_0:

$\ln 2,\ x_0 = 1,\ n = 10$

$$[\ f(x) = \ln x,\ T_{10}(x) = \sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k,\ \ln 2 \doteq T_{10}(2) \doteq 0.646\ ]$$

(48) Vypočtěte s pomocí L'Hospitalova pravidla:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$ [2]

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$ [∞]

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}$ [0]

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x}$ [1]

(49) Vypočtěte limity typu $0 \cdot \infty$:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$ [0]

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x e^x$ [0]

(50) Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce.

$y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ [$x = -1,\ y = x - 5$]

(51) Vyšetřete průběh funkce.

a) $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+3x+1}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x^2}$

c) $f(x) = x + 2\,\mathrm{arccotg}\, x$

(52) Integrace užitím základních vzorců.

a) $\displaystyle\int \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ $\quad$ $[\ \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{14}{3}\sqrt{x^3} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{4}{3x^2}\right) dx$ $\quad$ $[\ \frac{28}{15}\sqrt{x^5} + \frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{3x} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \left(10^x - 2^x + 5^{2x}\right) dx$ $\quad$ $[\ \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3}\, dx$ $\quad$ $[\ x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ $\quad$ $[-\frac{1}{x} + x - 2\ln|x| + C\ ]$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx$ $\quad$ $[\ x - \operatorname{arctg} x + C\ ]$

g) $\displaystyle\int \frac{5\sin^2 x + 3\cos^2 x}{2\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$ $\quad$ $[\ \frac{5}{2}\operatorname{tg} x - \frac{3}{2}\operatorname{cotg} x + C\ ]$

(NP) Integrace užitím základních vzorců.

a) $\displaystyle\int (3x^2 + 2x - 1)\, dx$ $\quad$ $[\ x^3 + x^2 - x + C\ ]$

b) $\displaystyle\int x^2(x^2+1)\, dx$ $\quad$ $[\ \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x}\, dx$ $\quad$ $[\ \frac{x^3}{3} + 3x - \ln|x| + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}\, dx$ $\quad$ $[\ \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{x}\, dx$ $\quad$ $[\ \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 6x + 24\sqrt{x} + 8\ln|x| + C\ ]$

(53) Integrace substituční metodou.

a) $\displaystyle\int (4x-3)^4\, dx$ $\quad$ $[\ \frac{1}{20}(4x-3)^5 + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x-7)^5}\, dx$ $\quad$ $[\ -\frac{1}{8}\frac{1}{(2x-7)^4} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{2-49x^2}}\, dx$ $\quad$ $[\ \frac{5}{7}\arcsin\frac{7x}{\sqrt{2}} + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x + 1}\, dx$ $\quad$ $[\ \ln|\sin x + 1| + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$ $\quad$ $[\ \ln|e^x + 1| + C\ ]$

f) $\displaystyle\int \sin x \cos^3 x \, dx$ $\quad [\ -\frac{1}{4}\cos^4 x + C\ ]$

g) $\displaystyle\int e^{\sin x} \cos x \, dx$ $\quad [\ e^{\sin x} + C\ ]$

(NP) Integrace substituční metodou.

a) $\displaystyle\int \frac{e^x \sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}} \, dx$ $\quad [\ \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 e^x} + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\quad [\ \arccos \frac{1}{x} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \sin^6 x \cos x \, dx$ $\quad [\ \frac{1}{7}\sin^7 x + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx$ $\quad [\ -e^{\frac{1}{x}} + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$ $\quad [\ \sin(\ln x) + C\ ]$

(54) Integrace metodou per partes.

a) $\displaystyle\int xe^x \, dx$ $\quad [\ xe^x - e^x + C\ ]$

b) $\displaystyle\int x \sin 2x \, dx$ $\quad [\ -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\ ]$

c) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} \, dx$ $\quad [\ \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \ln x \, dx$ $\quad [\ x\ln x - x + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \ln^3 x \cdot x \, dx$ $\quad [\ \frac{x^2}{2}(\ln^3 x - \frac{3}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\ln x - \frac{3}{4}) + C\ ]$

f) $\displaystyle\int x\ln(x+1) \, dx$ $\quad [\frac{1}{2}\ln(x+1)(x^2-1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C\ ]$

(NP) Integrace metodou per partes.

a) $\displaystyle\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x} \, dx$ $\quad [\ -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x + C\ ]$

b) $\displaystyle\int x \sinh x \, dx$ $\quad [\ x\cosh x - \sinh x + C\ ]$

c) $\displaystyle\int 5xe^{-4x} \, dx$ $\quad [\ -\frac{5}{4}xe^{-4x} - \frac{5}{16}e^{-4x} + C\ ]$

d) $\displaystyle\int e^x \cos 2x \, dx$ $\quad [\ \frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + C\ ]$

e) $\displaystyle\int (x^2 - 2x + 5)e^{-4}\,dx$ $\quad [\ -e^{-x}(x^2+5) + C\ ]$

(55) Integrace racionální lomené funkce.

a) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+2x+5}\,dx$ $\quad \left[\ \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C\ \right]$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+3}\,dx$ $\quad \left[\ \frac{1}{2}\ln\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right| + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C\ \right]$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)}\,dx$ $\quad \left[\ \ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C\ \right]$

d) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx$ $\quad [\ -\ln|e^x| + 2\ln|e^x-1| + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}\,dx$ $\quad \left[\ -\frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln|(x-1)(x+1)^2| + C\ \right]$

(NP) Integrace racionální lomené funkce.

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$ $\quad \left[\ \ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C\ \right]$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}\,dx$ $\quad \left[\ \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C\ \right]$

c) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx$ $\quad \left[\ x - \frac{5}{2}\ln(x^2+3x+4) + \frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C\ \right]$

(56) Integrace goniometrických funkcí.

a) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$ $\quad \left[\ \frac{1}{2}\sin^2 x + C\ \right]$

b) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$ $\quad [\ -\ln|\cos x| + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\,dx$ $\quad \left[\ \frac{\sin x - 2}{\cos x} + C\ \right]$

d) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$ $\quad \left[\ \frac{1}{3}\sin x\cos^2 x + \frac{2}{3}\sin x + C\ \right]$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$ $\quad \left[\ -\frac{1}{3\sin^3 x} + C\ \right]$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ $\quad \left[\ -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\ \right]$

(NP) Integrace goniometrických funkcí.

a) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x \, dx$ $\quad [\ \frac{1}{4}\sin^4 x + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \cos^5 2x \sin 2x \, dx$ $\quad [\ -\frac{\cos^6 x}{12} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx$ $\quad [\ -\ln|\sin x + \cos x| C\ ]$

(57) Integrace iracionálních funkcí.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+1} \, dx$ $\quad [\ 2(\sqrt{x} - \ln|\sqrt{x}+1|) + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{(x+1)(x-1)} \, dx$ $\quad [\ -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} \, dx$ $\quad [\ \frac{12}{5}\sqrt[12]{x} - 21\sqrt[12]{x^4} + 4\sqrt[12]{x^3} + 30\sqrt[12]{x^2} +$
$12\sqrt[12]{x} + 24\ln|\sqrt[12]{x}+1| + 36\ln|\sqrt[12]{x}+1| + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{1 + \sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x+1} \, dx$ $\quad [\ -2\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 2\ln\left|\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1\right| + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{x+\sqrt{x}} \, dx$ $\quad [\ x - 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}+1| + C\ ]$

(NP) Integrace iracionálních funkcí.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} \, dx$ $\quad [\ 3\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \sqrt[3]{x} + \ln|1+\sqrt[3]{x}|\right) + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} \, dx$ $\quad [\ -6\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C\ ]$

(58) Výpočet určitého integrálu – úpravou.

a) $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x} \, dx$ $\quad [\ \ln\frac{5}{3}\ ]$

b) $\displaystyle\int_0^3 |1-3x| \, dx$ $\quad [\ \frac{65}{6}\ ]$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} \, dx$ $\quad [\ 0\ ]$

(59) Výpočet určitého integrálu – metoda per partes.

a) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ [π]

b) $\int_{-1}^{1} \ln(x+2) \, dx$ [$3 \ln 3 - 2$]

c) $\int_{-1}^{1} \arccos x \, dx$ [π]

d) $\int_0^{1} e^{3x} x \, dx$ [$\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$]

(60) Výpočet určitého integrálu – substituční metoda.

a) $\int_1^{4} \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} \, dx$ [$2 \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$]

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x \cos x} \, dx$ [$\frac{1}{3}$]

c) $\int_1^{5} \frac{\ln x}{x} \, dx$ [$\frac{1}{2} \ln^2 5$]

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$ [$\frac{1}{3}$]

(NP) Výpočet určitého integrálu.

a) $\int_{-7}^{5} |x+1| \, dx$ [36]

b) $\int_{-1}^{1} \cosh x \, dx$ [$e - \frac{1}{e}$]

c) $\int_0^{1} \frac{dx}{(2x+1)^3} \, dx$ [$\frac{2}{9}$]

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx$ [$\sqrt{2} - 1$]

(61) Vypočtěte obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného křivkami $x^2 + y^2 = 1$, $y = 1 - x$, $x \geq 0$, $y > 0$.

[$\frac{\pi - 2}{4}$]

(62) Vypočtěte délku oblouku rovinné křivky $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $x \in \langle 1, 3\rangle$.

[$2 + \frac{1}{2}\ln 3$]

(63) Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy P kolem osy x. $P: y = -x^2+1$, $y = -2x^2 + 2$.

[$\frac{16}{5}\pi$]

(64) Vypočtěte povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy x. $P: x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$, $a > 0$.

[$\frac{6\pi a^2}{2}$]

(65) Najděte těžiště homogenní hmotné oblasti omezené křivkami $y = x^2$, $y = \frac{2}{1+x^2}$.

[$T\left(\frac{24+15\pi}{30\pi-20}\right)$]

Reference

[1] Tryhuk, V.: *Matematika I1 - Úvod do matematické logiky a teorie množin*, CERM, FAST VUT Brno 1994.

[2] Tryhuk, V.: *Matematika I2 - Reálná funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 1994.

[3] Veverka, J. - Slatinský E.: *Matematika I3 - Diferenciální pocet funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 1995.

[4] Novotný J.: *Matematika I4 - Lineární algebra*, CERM, FAST VUT Brno 1995.

[5] Horňáková, D.: *Matematika I5 - Vektorová algebra*, CERM, FAST VUT Brno 1995.

[6] Horňáková, D.: *Matematika I6 - Analytická geometrie*, CERM, FAST VUT Brno 1995.

[7] Voráček, J.: *Matematika I7 - Neurčitý integrál*, CERM, FAST VUT Brno 1995.

[8] Voráček, J.: *Matematika II1 - Určitý integrál a jeho užití*, CERM, FAST VUT Brno 1995.

[9] Daněček, J. - Dlouhý, O.: *Integrální počet I*, CERM, FAST VUT Brno 2003.

[10] Daněček, J. - Dlouhý, O. - Koutková, H. - Prudilová, K. - Sekaninová, J. - Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematiky I.*, CERM, FAST VUT Brno 1994.

[11] Čermáková, H. - Hřebíčková, J. - Slaběňáková, J. - Šafářová, H.: *Sbírka příkladů z matematiky II.*, CERM, FAST VUT Brno 1994.

[12] Prudilová, K. - Sekaninová, J. - Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematiky III.*, CERM, FAST VUT Brno 1995.

[13] Hřebíčková, J. - Ráček, J. - Slaběňáková, J.: *Diferenciální počet v Maple 7*, FAST VUT Brno, 2001, http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/matematika/diferencialni_pocet/.

[14] Hřebíčková, J. - Ráček, J. - Slaběňáková, J.: *Integrální počet v Maple 7*, FAST VUT Brno, 2001, http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/matematika/integralni_pocet/.

[15] Eliaš, J. - Horvát, J. - Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1. časť*, SVTL, Bratislava 1965.

[16] Černá, B.: *Cvičení z lineární algebry*, MZLU v Brně, Brno 1998.

[17] Jelínek, Z. - Samotná O.: *Matematika - Integrální počet*, Skriptum VŠ zemědělské v Brně, SPN, Praha 1985.

[18] Jirásek, F. - Kriegelstein, E. - Tichý, Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky I*, SNTL/ALFA, Praha 1987.

[19] Karásek, J. - Maroš, B.: *Integrální počet, Matematika - Metodické pokyny pro cvičení*, CERM, FAST VUT Brno 1994.

[20] Kříž, J. - Křížová, H.: *Diferenciální počet, metodické pokyny*, Fakulta strojní VUT, Brno 1978.

[21] Vosmanská, G.: *Matematika*, MZLU v Brně, Brno 1997.

[22] Online verze textů: *Riešené úlohy z matematiky 1*, Katedra Matematiky a Deskriptivnej geometrie, Stavebna fakulta, STU, Bratislava, http://www-kmadg.svf.stuba.sk/skripta/skripta.pdf.

[23] Online verze textů: *Riešené úlohy z matematiky 2*, Katedra Matematiky a Deskriptivnej geometrie, Stavebna fakulta, STU, Bratislava, http://www-kmadg.svf.stuba.sk/skripta2/skripta2.pdf.