Vysoké učení technické v Brně **Stavební fakulta**

ÚSTAV MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Matematika 0A2

Cvičení, letní semestr

DOMÁCÍ ÚLOHY

Jan Šafařík

Brno

Obsah

1. Cvičení č.1

(1) Stanovte definiční obor dané funkce a načrtněte jej.

a) $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$ b) $z = 2\sqrt{y - x^2} + 5\sqrt{x - y^2}$

c) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ d) $z = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin 2xy$

[a) $Dz = \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$; b) $Dz = \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq x^2 \wedge x \geq y^2\}$; c) $Dz = \mathbb{E}_2 - \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y = x \wedge y = -x\}$; d) $Dz = \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 2\} \cap (\{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq -\dfrac{1}{2x} \wedge x > 0\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \leq -\dfrac{1}{2x} \wedge x < 0\}) \cup \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \leq \dfrac{1}{2x} \wedge x > 0\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq \dfrac{1}{2x} \wedge x < 0\}$]

2. Cvičení č.2

(2) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu daných funkcí.

a) $z = \dfrac{3xy}{x - y}$ b) $z = (\sin x)^{\cos y}$

c) $z = xye^{\sin \pi xy}$ d) $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$

[a) $z'_x = -\dfrac{3y^2}{(x - y)^2}$, $z'_y = -\frac{3x^2}{(x-y)^2}$;

b) $z'_x = \cos x \cos y (\sin x)^{\cos y - 1}$, $z'_y = -\sin y \ln \sin x (\sin x)^{\cos y}$;

c) $z'_x = y(1 + \pi xy \cos \pi xy)z$, $z'_y = x(1 + \pi xy \cos \pi xy)z$;

d) $z'_x = \dfrac{-2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = \dfrac{-2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}$]

NP Vypočtěte parciální derivace prvního řádu daných funkcí.

a) $z = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x + y}{xy}\right)^2} + \arcsin \dfrac{x + y}{xy}$ b) $z = (2x + y)^{2x+y}$

[a) $z'_x = -\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{xy - x - y}{xy + x + y}}$, $z'_y = -\dfrac{1}{y^2}\sqrt{\dfrac{xy - x - y}{xy + x + y}}$;

b) $z'_x = 2[1 + \ln(2x + y)]z$, $z'_y = [1 + \ln(2x + y)]z$]

(3) Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu daných funkcí.

a) $z = \dfrac{cosx^2}{y}$ b) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$

[a) $x''_{xx} = -\dfrac{2\sin x^2 + 4x^2\cos x^2}{y}$, $z''_{yy} = \dfrac{2\cos x^2}{y^3}$, $z''_{xy} = \dfrac{2x\sin x^2}{y^2}$; b) $z''_{xx} = \dfrac{4y}{9x^{\frac{7}{3}}}$, $z''_{yy} = \dfrac{-x}{4\sqrt{y^3}}$, $z''_{xy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} - \dfrac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$]

NP Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu daných funkcí.

a) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ b) $z = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

[a) $z''_{xx} = \dfrac{-3xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$, $z''_{xy} = \dfrac{y(2x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$, $z''_{yy} = \dfrac{-x(x^2+2y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$; b) $z''_{xx} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{xy} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{yy} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$]

(4) Vypočtěte všechny požadované derivace daných funkcí.

a) $z = e^x\ln y + \sin y\ln x$, $x'''_{xyy} =?$, $x'''_{yyy} =?$ b) $z = x^2y + e^{xy^2}$, $z'''_x xy =?$

[a) $z'''_{xyy} = -\dfrac{e^x}{y^2} - \dfrac{\sin y}{x}$, $z'''_{yyy} = \dfrac{2e^x}{y^3} - \cos y\ln x$; b) $z'''_{xxy} = 2 + e^{xy^2}y^3(4+2xy^2)$]

3. Cvičení č.3

(5) Určete d^2z v bodě A funkce $z = f(x,y)$.

a) $z = \sin x\sin y$, $A = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ b) $z = y\ln x$, $A = (1,1)$

[a) $-\frac{1}{2}dx^2 - dxdy - \frac{1}{2}dy^2$; b) $-dx^2 + 2dxdy$]

NP Určete d^2z v bodě A funkce $z = f(x,y)$.

a) $z = e^{xy}, A = [1,2]$

[a) $4e^2dx^2 + 6e^2dxdy + e^2dy^2$]

Taylorova věta pro funkci $f(x)$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$:

$$f(X) = f(X_o) + \frac{1}{1!}df(X_o) + \frac{1}{2!}d^2 f(X_o) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(X_o) + R_{n+1}(X),$$

kde zbytek $R_{n+1}(X) = \dfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_1 + \delta h_1, \dots, x_n + \delta h_n)$, $\delta \in (0,1)$.

(6) Napište Taylorův polynom stupně n pro funkci $y = f(x,y)$ v bodě A.

a) $z = e^x \sin y,\ A = [0,0],\ n = 3$
b) $z = \sin(xy),\ A = [0, \frac{\pi}{2}],\ n = 2$

[a) $y + xy + \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{6}y^3$; b) $\frac{\pi}{2}x + x(y - \frac{\pi}{2})$]

NP Napište Taylorův polynom stupně n pro funkci $y = f(x,y)$ v bodě A.

a) $z = \ln(1-x)\ln(1-y),\ A = [0,0],\ n = 3$

[a) $xy + \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{2}xy^2$]

4. Cvičení č.4

Pravidla pro počítání složených funkcí:

- $z = f(x,y)$, $x = x(t)$ a $y = y(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{dy}{dt}$$

- $w = f(x,y,z)$, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ a $z = z(u,v)$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial v},$$

- Obecně: $w = f(x_1, \dots, x_m)$, $x_k = x_k(t_1, \dots, t_n)$, pro $k = 1, \dots, m$

$$\frac{\partial w}{\partial t_i} = \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \left(\frac{\partial w}{\partial x_m}\right) \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_i},$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$.

(7) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu složených funkcí.

a) $z = u + v^2,\ u = x^2 + \sin y,\ v = \ln(x + y)$
b) $z = u^2 v - v^2 u,\ u = x \cos y,\ v = x \sin y$

[a) $z'_x = 2x + \dfrac{2}{x+y}\ln(x+y)$, $z'_y = \cos y + \frac{2}{x+y}\ln(x+y)$; b) $z'_x = 3x^2 \sin y \cos y(\cos y - \sin y)$, $z'_y = x^3(\sin y + \cos y)(1 - 3\sin y \cos y)$]

NP Vypočtěte parciální derivace prvního řádu složených funkcí.

a) $z = u^v$, $u = \ln(x + y)$, $v = e^{\frac{x}{y}}$

[a) $z'_x = vu^{v-1}\dfrac{1}{x-y} + u^v \ln v \dfrac{e^{\frac{x}{y}}}{y}$, $z'_y = \dfrac{vu^{v-1}}{y-x} + u^v \ln u \dfrac{-e^{\frac{y}{y}}}{y^2}$]

5. Cvičení č.5

(8) Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně danou rovnicí.

a) $\cos(ax + by - cz) = k(ax + by - cz)$
b) $x + y + z = e^z$

[a) $z'_x = \dfrac{a}{c}$, $z'_y = \dfrac{b}{c}$; b) $z'_x = \dfrac{1}{(x + y + z - 1)} = z'_y$]

(9) Vypočtěte první parciální derivace v bodě A funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně danou rovnicí.

a) $e^z + x^2 y + z + 5 = 0,\ A = [1, -6, 0]$
NP) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = 0,\ A = \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}\right]$

[a) $z'_x(A) = 6$, $z'_y(A) = -\dfrac{1}{2}$, NP) $z'_x(A) = -1$, $z'_y(A) = 0$]

Tečná rovina a normála plochy:

Tečná rovina τ a normála n plochy $z = f(x, y)$ v bodě $B_0 = [x_0; y_0; z_0]$ jsou dány rovnicemi tvaru:

τ : $(x - x_0) \cdot f_x(B_0) + (y - y_0) \cdot f_y(B_0) - (z - z_0) = 0$

n : $\dfrac{x - x_0}{f_x(B_0)} = \dfrac{y - y_0}{f_y(B_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$

Je-li plocha dána implicitně $F(x;y;z)=0$, pak

$$\tau: \qquad (x-x_0)\cdot F_x(B_0)+(y-y_0)\cdot F_y(B_0)+(z-z_0)\cdot F_z(B_0)=0$$

$$n: \qquad \frac{x-x_0}{F_x(B_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(B_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(B_0)}$$

Pro normálový vektor $\vec{n}$ tečné roviny platí $\vec{n}=(F_x(B_0);F_y(B_0);F_z(B_0))$. Normálu si můžeme vyjádřit parametricky ve tvaru:

$$x=x_0+tF_x(B_0),\; y=y_0+tF_y(B_0),\; z=z_0+tF_z(B_0);\; t\in\mathbb{R}.$$

(10) Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě A plochy $z=f(x,y)$ zadané implicitně danou rovnicí.

a) $x^2+y^2+z^2-49=0,\; A=[2,-6,?]$
b) $(z^2-x^2)xyz-y^5=5,\; A=[1,1,2]$

[a) $\tau_1: \; 2x-6y+3z-49=0$, $\vec{n_1}: \; x=2+4t, y=-6-12t, z=3+6t$, $\tau_2: \; 2x-6y-3z-49=0$, $\vec{n_2}: \; x=2+4t, y=-6-12t, z=-3-6t$]

6. Cvičení č.6

(11) Nalezněte lokální extrémy daných funkcí.

a) $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$
b) $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$
c) $z=\ln\dfrac{x}{6}+2\ln y+\ln(12-x-y)$

[a) $[4;4]$ - lok.max.; b) $[-1;2]$ - není, $[0;0]$ - lok.min., $[-1;-2]$ a $\left[-\frac{5}{2};0\right]$ - lok.max., $[3;6]$ - lok.max.]

NP Nalezněte lokální extrémy daných funkcí.

a) $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$
b) $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

[a) $[5;2]$ - lok.min.; b) $[4;4]$ - lok.max.]

7. Cvičení č.7

(12) Nalezněte vázané extrémy dané funkce při daných podmínkách.

a) $z = x + 2y;$ podm. $x^2 + y^2 = 5$
b) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y};$ podm. $x + y = 2$

[a) $[1; 2]$ - lok.max., $[-1; -2]$ - lok.nim.; b) $[1; 1]$ - lok.min.]

NP Nalezněte vázané extrémy dané funkce při daných podmínkách.

a) $z = x + y;$ podm. $xy = 1$
b) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y};$ podm. $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

[a) $[1; 1]$ - lok.max., $[-1; -1]$ - lok.nim.; b) $[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ - lok.min., $[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ - lok.max.]

(13) Najděte absolutní extrémy daných funkcí.

a) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y;$ na obdélníku $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$
b) $z = x^2 - xy + y^2;$ Mje určena nerovnicí $|x| + |y| \leq 1$
c) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y;$ na oblasti dané nerovnicí $x^2 + y^2 \leq 25$

[a) $[1; 2]$ - abs.max., $[1; 0]$ - abs.nim.; b) $[0; 1]$, $[0; -1]$, $[1; 0]$, $[-1; 0]$ - abs.max., $[0; 0]$ - abs.min.; c) $[3; -4]$ - abs.min., $[-3; 4]$ - abs.max.]

8. Cvičení č.8

(14) Určete derivaci ve směru $\vec{s}$ v bodě A a gradient v bodě A funkce $z = f(x, y)$.
$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $A = [3; 4]$, $\vec{s} = (3; 4)$.

[$\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\dfrac{19}{5}$, grad $z = -\dfrac{17}{5}\vec{i} - \dfrac{11}{5}\vec{j}$]

(15) Určete derivaci funkce $z = \ln(x^2 + y^2)$ v bodě $A = [1; 2]$.
a) ve směru tečného vektoru v bodě A ke křivce $y = 2\sqrt{x}$,
b) ve směru, v němž je derivace maximální.

[a) $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$; b) $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\dfrac{2}{5}\sqrt{2}$]

9. Cvičení č.9

(16) Určete tečnou rovinu a normálu v bodě T plochy $z = f(x, y)$.
$z = xy^2 - x^2y$, $T = [2; 1; ?]$.

$[\ \tau : 3x + z - 4 = o;\ \vec{n} : x = 2 + 3t, y = 1, z = -2 + t\ ]$

(17) Určete tečnou rovinu a normálu v bodě T plochy $z = f(x, y)$.
$z = \dfrac{y^2}{x^2}$, $T = [-1; 2; ?]$.

$[\ \tau : 8x + 4y - z44 = o;\ \vec{n} : x = -1 + 8t, y = 2 + 4t, z = 4 - t\ ]$

10. Cvičení č.10

(18) Nalezněte obecné řešení daných diferenciálních rovnic.

a) $y' = 10^{x+y}$ $\qquad [\ 10^x + 10^{-y} = C\ ]$

b) $y' = -\sqrt{\dfrac{1 - y^2}{1 - x^2}}$ $\qquad [\ \arcsin y + \arcsin x = C\ ]$

(19) Nalezněte partikulární řešení dané diferenciální rovnice.

$x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0,\ y(-2) = 1$ $\qquad [\ y^2 = \dfrac{2}{5}x^2 - \dfrac{3}{5}\ ]$

11. Cvičení č.11

(20)

12. Cvičení č.12

(21)

Reference

[1] Čermáková, H. - Hřebíčková, J. - Slaběňáková, J. - Šafářová, H.: *Sbírka příkladů z matematiky II.*, CERM, FAST VUT Brno 1994.

[2] Hřebíčková, J. - Ráček, J. - Slaběňáková, J.: *Diferenciální rovnice druhého a vyssích řádů v Maple 7 - řesené příklady*, FAST VUT Brno, 2001, http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/matematika/diferencialni_rovnice/.

[3] Kříž, J. - Křížová, H.: *Diferenciální počet, metodické pokyny*, Fakulta strojní VUT, Brno 1978.

[4] Havelka, J. - Chábek, J.: *Matematika (Diferenciální rovnice, Nekonečné řady)*, Fakulta stavební VUT, SNTL, Praha 1978.

[5] Havelka, J. - Veverka, J.: *Matematika (Diferenciální rovnice, Nekonečné řady)*, Fakulta stavební VUT, Brno 1987.

[6] Veverka, J.: *Diferenciální počet II*, Fakulta stavební, Brno 1982.

[7] Online verze textů: *Riešené úlohy z matematiky 2*, Katedra Matematiky a Deskriptivnej geometrie, Stavebna fakulta, STU, Bratislava, http://www-kmadg.svf.stuba.sk/skripta2/skripta2.pdf.