Vysoké učení technické v Brně Stavební fakulta

ÚSTAV MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Matematika 0A4

Cvičení, letní semestr

DOMÁCÍ ÚLOHY

Jan Šafařík

(1) 120 krát jsme házeli hrací kostkou. $'1'$ padla 20 krát, $'2'$ a $'5'$ padla 18 krát, $'3'$ a $'4'$ padla 21 krát a $'6'$ padla 22 krát. Určete výběrovou rozdělovací funkci a histogram.

(2) Pro zvýšení kvality nově vyvinutého měřícího přístroje jsme prováděli měření mezi 2 nivelačními body. Správná hodnota výsledku byla známá. Dostali jsme následující chyby měření.

0.00	0.10	0.10	0.55	0.40
−0.51	0.10	−0.15	0.11	−0.09
0.19	0.15	−0.18	−0.14	−0.21
0.33	0.21	0.17	−0.12	0.16
−0.09	0.05	0.06	−0.01	−0.36

Určete výběrovou rozdělovací funkci a nakreslete histogram. Variační obor rozdělte na 5 stejných podintervalů.

(3) (viz. [1] - Př. 6/6a) Určete konstantu c tak, aby následující funkce byla hustotou spojité náhodné veličiny X na uvedeném oboru hodnot: $f(x) = c \cdot \operatorname{tg} x$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{4}\rangle$.

(4) Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot e^{-2x} & x \in (0,2) \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \{(0,2)\} \end{cases}$$

a) určete A,
b) $P(X < 1)$, $P(X > \frac{1}{2})$

[a) $A = \dfrac{-2e^4}{1-e^4}$, b) $P(X < 1) = \dfrac{e^2}{e^2+1}$, $P(X > 1/2) = \dfrac{1-e^3}{1-e^4}$]

NP Hustota rozložení náhodné veličiny X je dána

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot \cos^2 x & |x| \leq \pi/2 \\ 0 & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

a) určete k,
b) $P(X > \frac{\pi}{4})$.

[a) $k = \dfrac{2}{\pi}$, b) $P\left(X > \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right)$]

---

(5) (viz. [1] - Př. 11/1c) Určete distribuční funkci F náhodné veličiny X, jestliže má X pravděpodobnostní funkci $p(x) = \binom{3}{x}(0.1)^x(0.9)^{3-x}$ pro $x = 0, 1, 2, 3$.

(6) (viz. [1] - Př. 12/3j - upravený) Rozhodněte, zda následující funkce je distribuční funkce náhodné veličiny X. V případě, že ne, upravte danou funkci, aby byla distribuční funkcí (opravte obory hodnot) a poté určete o jakou náhodnou veličinu se jedná a určete též rozdělovací funkci f této náhodné veličiny.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 2x & \text{pro } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{pro } x > 1 \end{cases}$$

---

(7) (viz. [1] - Př. 23/1b) Určete střední hodnotu $E(X)$ a rozptyl $D(X)$ náhodné veličiny X, jestliže X má rozdělovací funkci $p(x) = \dfrac{x}{16}$ pro $x = 1, 3, 5, 7$.

(8) Určete střední hodnotu $E(X)$ a rozptyl $D(X)$ náhodné veličiny X, jestliže X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{pro } x > 2 \\ 0 & \text{pro } x \leq 2 \end{cases}$$

[$E(X) = 3$, $D(X) = 3$, Pozn.: nejdříve z $F(X)$ zjistěte $f(x)$]

(9) (viz. [1] - Př. 33/11) Byly zjištěny odchylky od jmenovité váhy 50 kg. Odhadněte rozptyl odchylky, když víme, že střední hodnota odchylky je 0,5 kg.

třída	odchylky v kg	n_i
1.	0.0 - 0.2	20
2.	0.2 - 0.4	18
3.	0.4 - 0.6	22
4.	0.6 - 0.8	20
5.	0.8 - 1.0	20

(10) Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (x+1)^2 & x \in \langle -1, 1\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a) určete konstantu c,
b) $P(X > 0)$,
c) $E(X)$,
d) 50% kvantil náhodné veličiny X.

$$\text{a)}\ 1 = \int_{-1}^{1} c \cdot (x+1)^2 \mathrm{d}x = c \cdot \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1} = c \cdot \left(\frac{8}{3} - 0\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{8}$$

b) $P(X>0) = \int\limits_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{1} \frac{3}{8}(x+1)^2\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\Big[\frac{(x+1)^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{3}{8}\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{8}$

c) $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \frac{3}{8}x(x+1)^2\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\int\limits_{-1}^{1}(x^3+2x^2+x)\mathrm{d}x =$

$\frac{3}{8}\Big[\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{1} = \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

d) $F(X_p) = p \quad F(X_{0.5}) = 0.5$

$F(X_p) = \int_{-1}^{X_p} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{X_p} \frac{3}{8}\,(x+1)^2\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\Big[\frac{(x+1)^3}{3}\Big]_{-1}^{X_p} =$

$\frac{3}{8}\left(\frac{(X_p+1)^3}{3}+0\right) = \frac{(X_p+1)^3}{8} \quad\Rightarrow\quad (X_p+1)^3 = 8\cdot 0.5 \quad\Rightarrow$

$x_{0.5}+1 = 1.5874 \quad\Rightarrow\quad x_{0.5} = 0.5874$

(11) Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} c\cdot x^2 & x\in\langle 0,2\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a) určete konstantu c,
b) $E(X)$,
c) $D(X)$,
d) 30% kvantil náhodné veličiny X.

[a) $c=\frac{3}{8}$, b) $E(X)=\frac{3}{2}$, c) $D(X)=\frac{3}{20}$, d) $x_{0.3}=1.3388659$]

---

(12) Realizace náhodného výběru z normálního rozložení je 2.476; 2.201; 2.212; 2.493; 1.999; 2.403; 2.429; 2.348; 2.546; 2.402; 2.070.
a) Zjistěte bodové odhady μ, σ^2,
b) Vypočtěte realizaci 98%-ního intervalového odhadu skutečné střední hodnoty a rozptylu.

[a) $\widehat{\mu}=2.325$, $\widehat{\sigma}^2=0.0341$, b) $\mu:\langle 2.171; 2.479\rangle$, $\sigma:\langle 0.0147; 0.133\rangle$]

(13) (viz. [2] - Př. 85/13.9) Z populace stejně starých selat téhož plemene bylo vylosováno 6 selat a po dobu půl roku jim byla podávána táž výkrmná dieta. Byly zaznamenány průměrné denní přírůstky v Dg. Z dřívějších pokusů je známo, že v populaci mívají takové přírůstky normální rozložení, avšak střední hodnota i rozptyl se mění.

Přírůstky v Dg: 62, 54, 55, 60, 53, 58
Při riziku $\alpha = 0.05$ odvoďte
a) dolní odhad neznámé střední hornoty μ při neznámé směrodatné odchylce σ,
b) intervalový odhad směrodatné odchylky σ.

[$\widehat{\mu} = 57$, $\widehat{\sigma} = 3.578$, a) $\mu : \langle 54.06; \infty\rangle$, b) $\sigma : \langle 2.23; 8.78\rangle$, pozn.: $t(5,1) = \infty$]

(14) (viz. [1] - Př. 43/16) Z náhodného výběru o rozsahu $n = 16$ výsledků zkoušek krychelné pevnosti betonu třídy B20 z určité výrobny byl zjištěn průměr 28.8 MPa. Z předchozí zkušenosti je známo, že pevnost je normální náhodná veličina se známou směrodatnou odchylkou 4.20 MPa. Na hladině významnosti 0.05 máme testovat hypotézu, že daná výrobna dodržuje střední krychelnou pevnost 31 MPa.

(15) (viz. [1] - Př. 48/6)

---

(16) Řešte rovnice $f(x) = 0$ metodou prosté iterace a Newtonovou metodou. Použijte alespoň jednou metodu prosté iterace a alespoň jednou Newtonovu metodu. Počítejte s přesností na 6 desetinných míst.
a) $(x+1)e^{x-1} - 1 = 0$
b) $e^x - x^2 + x = 0$
c) $x^3 + 3x^2 - 4x - 10 = 0$

[a) $\widehat{x} = 0.5571455990$; b) $\widehat{x} = -0.4441302288$; c) $\widehat{x}_1 = -1.602704931$, $\widehat{x}_2 = 1.895106516$]

---

(17) (viz. [6] - Př. 596/1) Utvořte Newtonův interpolační polynom pro funkci $y = f(x)$, danou tabulkou a zjistěte hodnotu $f(3.7608)$.

x	0	2.5069	5.0154	7.5227
y	0.3989423	0.3988169	0.3984408	0.3978138

[$P(x) = N_2(x) = 0.3989423 - 0.0000500x - 0.0000199x(x - 2.5069)$; $f(3.7608) \doteq N_2(3.7608) = 0.3986604$]

(18) Aproximujte funkci $y = f(x)$ mnohočlenem stupně nejvýše 2. y je dáno tabulkou. Použijte diskrétní metodu nejmenších čtverců.

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	7	2	-0.5	-2	-0.5

[$f^* = x^2 - 1.9x - 0.8$]

(19) Řešte soustavu rovnic $\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \end{array}$ metodou nejmenších čtverců.

[$x_1 = \frac{9}{7}$, $x_2 = \frac{4}{7}$]

Následující příklady nejsou povinné. Povinnost vypracovat a odevzdat tyto příklady budou mít jen zvlášť určení „hříšníci“.

NP Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \frac{c}{e^{-x} + e^{x}} \quad x \in \mathbb{R}$$

a) určete c,
b) $P(1 < X < 2)$.

[a) $c = \dfrac{2}{\pi}$, b) $P(1 < X < 2) = \dfrac{2}{\pi}(\operatorname{arctg} e^2 - \operatorname{arctg} e)$]

NP Hustota rozložení náhodné veličiny X je dána

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x \geq 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a) nalezněte distribuční funkci a načrtněte její graf,
b) spočtěte $P(1 \leq X \leq 5)$.

[a) $F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x} & x \geq 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, b) $P(1 \leq X \leq 5) = \dfrac{4}{5}$]

NP Určete střední hodnotu $E(X)$ a rozptyl $D(X)$ náhodné veličiny X, jestliže X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 1 - e^{-3x} & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

[$E(X) = 1/3$, $D(X) = 1/9$]

NP Náhodná veličina X má rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$; $\mu = 10$, $\sigma^2 = 16$
a) vypočtěte $P(|x - 9| < 2)$,
b) najděte 80% kvantil náhodné veličiny X.

[a) $P(|x-9|<2) = 0.3721$, b) $x_p = x_{0.8} = 13.38$]

NP Oborem hodnot náhodné veličina X je $-1, 0, 1, 2$. Při opakování pokusu jsme dostali následující hodnoty

-1	0	1	2
25	30	5	60

Na hladině 5% významnosti testujte, zda náhodná veličina X může mít pravděpodobnostní funkci $p(x)$ danou tabulkou

-1	0	1	2
1/4	1/4	1/10	4/10

[Zamítáme hypotézu H_0, že náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci $p(x)$.]

NP Řešte rovnice $f(x) = 0$ metodou prosté iterace a Newtonovou metodou. Použijte alespoň jednou metodu prosté iterace a alespoň jednou Newtonovu metodu. Počítejte s přesností na 6 desetinných míst.
a) $3\ln x - x + 4 = 0$
b) $e^x - x^2 - 2x - 2 = 0$
c) $\sin x - x^3 - 1 = 0$

[a) $\widehat{x}_1 = 0.2903879955$, $\widehat{x}_2 = 11.26513864$; b) $\widehat{x} = 2.674060314$; c) $\widehat{x} = -1.249052149$]

NP (viz. [5] - Př. 170/6) Najděte Newtonův interpolační polynom, je-li dáno

x_i	0	2	3	5
f_i	1	3	2	5

[$N_3(x) = \dfrac{3}{10}x^3 - \dfrac{13}{6}x^2 + \dfrac{62}{15}x + 1$]

NP (viz. [5] - Př. 141/6.3 [136/6.1]) Najděte Newtonův interpolační polynom, je-li dáno

x_i	0	1	2	5
f_i	2	3	12	147

[$N_3(x) = x^3 + x^2 - x + 2$]

NP (viz. [4] - Př. 55/1) Metodou nejmenších čtverců stanovte algebraický mnohočlen nejvýše 1. stupně, který nejlépe aproximuje funkci f, pro kterou známe tabulku hodnot

x_i	-1	0	1	3
f_i	-3.5	0	0.5	5

[$f^* = -1 + 2x$]

NP (viz. [4] - Př. 58/1) Metodou nejmenších čtverců stanovte algebraický mnohočlen nejvýše 1. stupně, který nejlépe aproximuje funkci f, pro kterou známe tabulku hodnot

x_i	-4.5	0	1	3.5
f_i	-4	0	1.5	4

[$f^* = x + \frac{3}{8}$]

NP (viz. [4] - Př. 58/2) Metodou nejmenších čtverců stanovte algebraický mnohočlen nejvýše 2. stupně, který nejlépe aproximuje funkci f, pro kterou známe tabulku hodnot

x_i	0	1	2	3	4
f_i	-1	2	3	4	3

[$f^* = -\frac{4}{7}x^2 + \frac{23}{7}x - \frac{33}{35}$]

Reference

[1] Koutková H., Dlouhý O.: *Sbírka příkladů z pravděpodobnosti a matematické statistiky*, CERM, Fakulta stavební VUT, Brno 1997.

[2] Budíková M., Mikoláš Š., Osecký P.: *Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika - sbírka příkladů*,Masarykova univerzita, Brno 1996.

[3] Dalík J.: *Numerické metody*, CERM, Fakulta stavební VUT, Brno 1997.

[4] Šanová L., Salvet V., Poděbradský J.: *Úvod do numerických metod*, Fakulta stavební VUT, Brno 1978.

[5] Horová I.: *Numerické metody*, Masarykova univerzita, Brno 1999.

[6] Děmidovič B.P., Maron, I.A.: *Základy numerické matematiky*, SNTL, Praha 1966.

[7] . . .