Vysoké učení technické v Brně **Stavební fakulta**

ÚSTAV MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Matematika BA01

Cvičení, zimní semestr

DOMÁCÍ ÚLOHY

Jan Šafařík

Brno **© 2005**

(1) Určete rovnici kručnice o poloměru r, procházející počátkem, jestliže $S[3;2]$.

[$(x-3)^2+(y-2)^2=13$]

(2) Znázorněte parabolu $x^2-10x-9y+61=0$.

[$(x-5)^2=9(y-4)$]

(3) Znázorněte množinu $x^2-4x+4y\leq 0$, $x^2-4x+y^2\leq 0$.

[$(x-2)^2\leq -4(y-1)$, $(x-2)^2+y^2\leq 2^2$]

(4) Zjednodušte výraz $\frac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x}$.

[$\operatorname{tg} x$, $\cos x\neq -\frac{1}{2}$, $x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$]

(5) Jsou dány matice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Vypočtěte matici $AB-BA$.

[$AB-BA=\begin{pmatrix} -10 & -4 & -7\\ 6 & 14 & 4\\ -7 & 5 & -4\end{pmatrix}$]

(6) Určete hodnost matice $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2\\ -2 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$

[$h(A)=4$]

(7) Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -2\\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 8\\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1\\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}$$

[$(1;2;1;3)$]

(8) Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 13 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array}$$

[$(t+5; 2/3; -t-1; 2t-1/3), t \in \mathbb{R}$]

(9) Vypočtěte determinant $A = \begin{vmatrix} \sin x & 1 & \cos x \\ \sin y & 1 & \cos y \\ \sin z & 1 & \cos z \end{vmatrix}$.

[$\sin(x-z) + \sin(z-y) + \sin(y-x)$]

NP Vypočtěte Vandermondův determinant $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 8 & 27 & 64 & 125 & 216 \\ 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \end{vmatrix}$.

[288]

NP Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & & = & 31 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & & = & 29 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & & = & 10 \end{array}$$

[$(3; 4; 5)$]

(10) Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Spočtěte A^{-1},

NP: B^{-1}, $B^{-1} \cdot A^{-1}$, $(A \cdot B)^{-1}$, $A^{-1} \cdot B^{-1}$, $(B \cdot A)^{-1}$.

[$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{13}{3} \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (AB)^{-1}$,

$$A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{13}{3} \\ -\frac{10}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{8}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (BA)^{-1} \;]$$

(11) Řešte maticovou rovnici $A^2 \cdot X + B = C$ pro neznámou X, jestliže
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcll} A^2 \cdot X + B & = & C & / \; - B \text{ zprava} \\ A^2 \cdot X & = & C - B & / \; \cdot A^{-1} \text{ zleva} \\ X & = & (A^2)^{-1} \cdot (C - B) & \end{array}$$

$[\; X = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} \;]$

NP Řešte maticovou rovnici $A \cdot X \cdot A = B$ pro neznámou X, jestliže
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -5 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcll} A \cdot X \cdot A & = & B & / \; \cdot A^{-1} \text{ zleva} \\ X \cdot A & = & A^{-1} \cdot B & / \; \cdot A^{-1} \text{ zprava} \\ X & = & A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} & \end{array}$$

$[\; X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;]$

(12) Zjistěte zda jsou dané vektory lineárně závislé: $\vec{a} = (1; 1; -5)$, $\vec{b} = (-3; -3; 1)$, $\vec{c} = (0; 1; 2)$, $\vec{d} = (5; 6; 7)$.

[jsou lineárně závislé]

(13) Vektor $\vec{c} = (3; 2; 1)$ vyjádřete jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}_1 = (1; 1; 3)$, $\vec{u}_2 = (2; 1; -2)$, $\vec{u}_3 = (4; 2; 1)$.

$[\; \vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \;]$

NP Určete vlastní čísla (spektrum) a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

[$\lambda_{1,2,3,4} = 2$, $(u-v; u-v; v; u)^T$]

(14) Určete vlastní čísla (spektrum) a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[$\lambda_{1,2} = 0$, $(0; s; 0; s)^T$; $\lambda_{3,4} = 2$, $(t; 0; 0; t)^T$]

NP Určete zda následující matice z vektorového prostoru $V = Mat_{3,3}(\mathbb{R})$ jsou lineárně závislé nebo lineárně nezávislé:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[jsou lineárně závislé]

(15) Určete objem rovnoběžnostěnu s vrcholy dolní podstavy $A = [3; 4; 0]$, $B = [9; 5; -1]$, $C = [1; 7; 1]$, jestliže krajní bod hrany AE je $E = [3; 2; 5]$.

[$V = |[\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}]| = 108$]

NP Jsou dány body $A = [1; 1; 4]$, $B = [4; 2; 2]$, $C = [1; 2; 6]$. Určete jednotkový vektor $\vec{v}^0$ kolmý k vektorům $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

[$\vec{v}^0_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{61}}(4\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k})$]

(16) Vypočtěte objem čtyřstěnu s vrcholy $A = [1; -5; 4]$, $B = [0; 3; 1]$, $C = [-2; -4; 3]$, $D = [-4; 4; -2;]$ a vzdálenost v vrcholu A od stěny BCD.

[$V = \dfrac{41}{6}, v = \dfrac{41}{\sqrt{1457}}$]

(17) Napište obecnou rovnici roviny procházející bodem $A = [23; 3; -4]$ a přímkou p.

$$p = \begin{cases} x = 8 - 2t \\ y = 5t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$$

[$7x - 62y - 81z - 299 = 0$]

(18) Je dána rovina $\sigma : 22x - 43y - 17z = 0$, rovina $\omega : -2x + 3y + z + 5 = 0$ a rovina α určená body $A = [1; 3; 0]$, $B = [2; 2; 1]$, $C = [4; 12; -1]$. Vypočítejte úhel společných přímek rovin σ, ω a rovin σ, α.

[$90°$]

(19) Určete sudost, lichost funkce f.

a) $y = x^2$ [funkce je sudá]
b) $y = \frac{1}{x}$ [funkce je lichá]
c) $y = 2x - 1$ [funkce není sudá, ani lichá]

(20) Nakreslete graf funkce $y = f(x)$, jestliže

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty; -1) \\ x^2 & x \in \langle -1; 1 \rangle \\ 3 - 2x & x \in (1.5; 2\rangle \end{cases}$
b) $y = 3 \sin x$
c) $y = \sin 2x$
d) $y = -3 \sin(x + 3\pi)$
e) $y = -2 \sin(\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}\pi)$
f) $y = -\sin(x + 3\pi)$

(21) Pomocí Hornerova schematu určete funkční hodnotu polynomu f v bodě x_0.

a) $f : y = x^3 - 3x^2 - 3x - 5$, $x_0 = 2$ [-15]
b) $f : y = x^5 - 3x^4 + 7x^2 + 2$, $x_0 = 2$ [14]

(22) Ukažte, že číslo $x_0 = -2$ je dvojnásobným kořenem polynomu $f : y = x^3 + 3x^2 - 4$.

(23) Najděte všechny reálné kořeny polynomu f.

a) $f : y = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$ [$1, 1, 1, 2, -2$]
b) $f : y = x^5 + 6x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 10x - 3$ [$1, -1, -3, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$]
c) $f : y = 3x^4 + 2x^3 - 28x^2 - 18x + 9$ [$\frac{1}{3}, -1, 3, -3$]

(24) Vyjádřete racionální funkci jako součet polynomu a ryzí racionální funkce.

a) $f : y = \dfrac{2x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 7x + 4}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}$ [$= 2x^2 - 3 + \dfrac{x^2 - x + 1}{x^4 - 3x^2 + 2x - 1}$]

NP) $f : y = \dfrac{4 - x^3}{4x^3 + 7x^2 - 2x}$ [$= -\dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{\frac{85}{12}}{4x - 1} + \dfrac{\frac{2}{3}}{x + 2}$]

c) $\dfrac{x+2}{x^3-2x^2}$, [$= -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x-2}$]

(25) Napište tvar rozkladu funkce f v součet parciálních zlomků.

NP) $f : y = \dfrac{x^2+4x-18}{(x-1)^3x^8(x^2+1)^2}$

[$f : y = \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{(x-1)^2} + \dfrac{A_3}{(x-1)^3} + \dfrac{B_1}{x} + \dfrac{B_2}{x^2} + \dfrac{B_3}{x^3} + \dfrac{B_4}{x^4} + \dfrac{B_5}{x^5} + \dfrac{B_6}{x^6} + \dfrac{B_7}{x^7} + \dfrac{B_8}{x^8} + \dfrac{C_1x+D_1}{x^2+1} + \dfrac{C_2x+D_2}{(x^2+1)^2} + \dfrac{C_3x+D_3}{(x^2+1)^3} = \dfrac{x^2+4x-18}{(x-1)^3x^8(x^2+1)^2}$]

b) $f : y = \dfrac{3x^4+2x}{(x^2+1)^2(3x+1)^2x^3}$

[$f : y = \dfrac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \dfrac{A_2x+B_3}{(x^2+1)^2} + \dfrac{C_1}{3x+1} + \dfrac{C_2}{(3x+1)^2} + \dfrac{D_1}{x} + \dfrac{D_2}{x^2} + \dfrac{D_3}{x^3}$]

(26) Rozložte racionální funkci v součet polynomu a parciálních zlomků.

a) $f : y = \dfrac{4x^2+9x-1}{x^3+2x^2-x-2}$ [$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x+2}$]

b) $f : y = \dfrac{2x^3-2x^2+5}{x^2-2x}$ [$= 2x + 2 - \frac{5}{2}\frac{1}{x} + \frac{13}{2}\frac{1}{x-2}$]

(27) Vypočtěte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^5-3x+2}$ [0]

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ [$\dfrac{3}{2}$]

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{|4-x|}{x-4}$ [neexistuje, $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{|4-x|}{x-4} = 1$, $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{|4-x|}{x-4} = -1$]

(28) Vypočtěte limity složených funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to \pi/12} \ln \sin^3 2x$ [$-\ln 8$]

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ [$-\frac{\pi}{2}$]

c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$ [$\frac{1}{4}$]

(29) Vypočtěte limity typu $\frac{k}{0}$:

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x-1}{9-x^2}$ $[\ -\infty\ ]$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x+1}{\sin x}$ $[\ -\infty\ ]$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\sin x}$ [neexistuje, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cos x}{\sin x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{\sin x} = \infty$]

(30) Vypočtěte limity v nevlastním bodě:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x+4}{2x^4-3x^3-1}$ $[\ 0\ ]$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^6+2x^4-x}{4x^3-x}$ $[\ -\infty\ ]$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{arctg} \dfrac{x^2}{x^2+4}$ $[\ \infty\ ]$

NP S použitím definice derivace určete derivaci $f'(x)$ funkcí:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $[\ \mathcal{D}(f) = \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}},\ \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} - \{0\}\ ]$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{3x^2}$ $[\ \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\},\ f'(x) = \dfrac{2-4}{3x^3},\ \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)\ ]$

(31) Určete derivaci $f'(x)$ a definiční obory $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{D}(f')$ funkcí:

a) $f(x) = \dfrac{4x^7+3x^5-2x^4+7x-2}{3x^4}$

$[\ \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\},\ f'(x) = \dfrac{12x^7+3x^5-21x+8}{3x^5},\ \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)\ ]$

b) $f(x) = (x^3+8)(x-2)$ $[\ \mathcal{D}(f) = \mathbb{R},\ f'(x) = 4x^3-6x^2+8,\ \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)\ ]$

c) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ $[\ \mathcal{D}(f) = \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2},\ \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)\ ]$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\log(3x^2+x+1)}$

$[\ \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0, -\frac{1}{3}\},\ f'(x) = \dfrac{6x+1}{(3x^2+x+1)\ln 10 \log^2(3x^2+x+1)},\ \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)\ ]$

(32) Určete první a druhou derivaci $f'(x)$, $f''(x)$ a příslušné definiční obory funkcí:

a) $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$

$[\ f'(x) = \dfrac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}},\ f''(x) = \dfrac{x(2x^2+9)}{\sqrt{(x^2+3)^3}},\ \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f'') = \mathbb{R}\ ]$

b) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$[\ f'(x) = -\dfrac{1}{\cos x},\ f''(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos^2 x},\ \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f'') = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}\ ]$

(33) Určete druhou derivaci $f''(x)$ a příslušné definiční obory funkcí:

a) $f(x) = x(\ln x - 1)$ $[\ f''(x) = \dfrac{1}{x},\ \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f'') = (0, \infty)\ ]$

b) $f(x) = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{x^2+1})$ $[\ f''(x) = -\dfrac{x}{(x^2+1)^2},\ \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f'') = \mathbb{R}\ ]$

(34) Najděte rovnici tečny t a normály n ke grafu funkce $y = f(x)$:

a) $f(x) = e^{-x}\cos 2x$ v bodě $A = [0, ?]$ $[\ t : x + y - 1 = 0,\ n : x - y + 1 = 0\ ]$

b) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + 1$, je-li t rovnoběžná s přímkou $x - 2y + 1 = 0$
$[\ t : x - 2y + 3 = 0,\ n : 4x + 2y - 3 = 0\ ]$

(35) Najděte přírůstek funkce Δf a diferenciál df v čísle x_0 pro přírůstek Δx:

$f(x) = \operatorname{arccotg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.2$ $[\ \Delta f = -0.09;\ df(x_0) = -0.1\ ]$

(36) Vypočítejte diferenciál funkce df v bodě x pro přírůstek h:

$4x^2 + \sqrt[3]{x}$ $[\ df(x,h) = \dfrac{24x\sqrt[3]{x^2}+1}{3\sqrt[3]{x^2}}h\ ]$

(37) Napište následující funkce užitím MacLaurinova polynomu n-tého stupně:

a) $f(x) = \ln(\cos x)$, $n = 6$ $[\ T_6(x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45}\ ]$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $n = 4$ $[\ T_4(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{5}{128}x^4\ ]$

(38) Napište následující funkce užitím Taylorova polynomu n-tého stupně v okolí bodu x_0:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$, $n = 3$ [$T_3(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x-2}{4} + \dfrac{(x-2)^2}{8} - \dfrac{(x-2)^3}{16}$]

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 1$, $n = 3$ [$T_3(x) = 1 + \dfrac{2(x-1)}{3} - \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{4(x-1)^3}{81}$]

(39) Vypočítejte přibližně následující funkční hodnotu pomocí Taylorova polynomu n-tého stupně T_n v okolí x_0:

$\ln 2$, $x_0 = 1$, $n = 10$

[$f(x) = \ln x$, $T_{10}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$, $\ln 2 \doteq T_{10}(2) \doteq 0.646$]

(40) Vypočtěte s pomocí L'Hospitalova pravidla:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$ [2]

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$ [∞]

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}$ [0]

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$ [1]

(41) Vypočtěte limity typu $0 \cdot \infty$:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x$ [0]

b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x e^x$ [0]

(42) Najděte všechny asymptoty ke grafu funkce.

$y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ [$x = -1$, $y = x - 5$]

(43) Vyšetřete průběh funkce.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x^2}$

c) $f(x) = x + 2\operatorname{arccotg} x$

(44) Integrace užitím základních vzorců.

a) $\displaystyle\int \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$ $\qquad [\ \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{14}{3}\sqrt{x^3} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{4}{3x^2} \right) dx$ $\qquad [\ \frac{28}{15}\sqrt{x^5} + \frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{3x} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \left(10^x - 2^x + 5^{2x} \right) dx$ $\qquad [\ \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3}\, dx$ $\qquad [\ x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$ $\qquad [-\frac{1}{x} + x - 2\ln|x| + C\ ]$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx$ $\qquad [\ x - \operatorname{arctg} x + C\ ]$

g) $\displaystyle\int \frac{5\sin^2 x + 3\cos^2 x}{2\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$ $\qquad [\ \frac{5}{2}\operatorname{tg} x - \frac{3}{2}\operatorname{cotg} x + C\ ]$

(NP) Integrace užitím základních vzorců.

a) $\displaystyle\int (3x^2 + 2x - 1)\, dx$ $\qquad [\ x^3 + x^2 - x + C\ ]$

b) $\displaystyle\int x^2(x^2+1)\, dx$ $\qquad [\ \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x}\, dx$ $\qquad [\ \frac{x^3}{3} + 3x - \ln|x| + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}\, dx$ $\qquad [\ \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{x}\, dx$ $\qquad [\ \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 6x + 24\sqrt{x} + 8\ln|x| + C\ ]$

(45) Integrace substituční metodou.

a) $\displaystyle\int (4x-3)^4\, dx$ $\qquad [\ \frac{1}{20}(4x-3)^5 + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x-7)^5}\, dx$ $\qquad [\ -\frac{1}{8}\frac{1}{(2x-7)^4} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{2-49x^2}}\, dx$ $\qquad [\ \frac{5}{7}\arcsin\frac{7x}{\sqrt{2}} + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x + 1}\,dx$ $[\ \ln|\sin x + 1| + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$ $[\ \ln|e^x + 1| + C\ ]$

f) $\displaystyle\int \sin x \cos^3 x\,dx$ $[\ -\frac{1}{4}\cos^4 x + C\ ]$

g) $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\,dx$ $[\ e^{\sin x} + C\ ]$

(NP) Integrace substituční metodou.

a) $\displaystyle\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1 + e^{2x}}\,dx$ $[\ \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 e^x} + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ $[\ \arccos\frac{1}{x} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \sin^6 x \cos x\,dx$ $[\ \frac{1}{7}\sin^7 x + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ $[\ -e^{\frac{1}{x}} + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$ $[\ \sin(\ln x) + C\ ]$

(46) Integrace metodou per partes.

a) $\displaystyle\int xe^x\,dx$ $[\ xe^x - e^x + C\ ]$

b) $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$ $[\ -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\ ]$

c) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx$ $[\ \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \ln x\,dx$ $[\ x\ln x - x + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \ln^3 x \cdot x\,dx$ $[\ \frac{x^2}{2}(\ln^3 x - \frac{3}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\ln x - \frac{3}{4}) + C\ ]$

f) $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,dx$ $[\frac{1}{2}\ln(x+1)(x^2 - 1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C\ ]$

(NP) Integrace metodou per partes.

a) $\displaystyle\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$ $[\ -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x + C\ ]$

b) $\displaystyle\int x\sinh x\,dx$ $[\ x\cosh x - \sinh x + C\ ]$

c) $\displaystyle\int 5xe^{-4x}\,dx$ $\qquad$ $\displaystyle[\ -\frac{5}{4}xe^{-4x}-\frac{5}{16}e^{-4x}+C\ ]$

d) $\displaystyle\int e^x\cos 2x\,dx$ $\qquad$ $\displaystyle[\ \frac{e^x}{5}(\cos 2x+2\sin 2x)+C\ ]$

e) $\displaystyle\int (x^2-2x+5)e^{-4}\,dx$ $\qquad$ $[\ -e^{-x}(x^2+5)+C\ ]$

(47) Integrace racionální lomené funkce.

a) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+2x+5}\,dx$ $\qquad$ $\displaystyle[\ \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5)-\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C\ ]$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+3}\,dx$ $\qquad$ $\displaystyle[\ \frac{1}{2}\ln\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)}\,dx$ $\qquad$ $\displaystyle[\ \ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx$ $\qquad$ $[\ -\ln|e^x|+2\ln|e^x-1|+C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}\,dx$ $\qquad$ $\displaystyle[\ -\frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\ln|(x-1)(x+1)^2|+C\ ]$

(NP) Integrace racionální lomené funkce.

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$ $\qquad$ $\displaystyle[\ \ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C\ ]$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}\,dx$ $\qquad$ $\displaystyle[\ \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx$ $\qquad$ $\displaystyle[\ x-\frac{5}{2}\ln(x^2+3x+4)+\frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C\ ]$

(48) Integrace goniometrických funkcí.

a) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$ $\qquad$ $\displaystyle[\ \frac{1}{2}\sin^2 x+C\ ]$

b) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$ $\qquad$ $[\ -\ln|\cos x|+C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\,dx$ $\qquad$ $\displaystyle[\ \frac{\sin x-2}{\cos x}+C\ ]$

d) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$ $\qquad$ $\displaystyle[\ \frac{1}{3}\sin x\cos^2 x+\frac{2}{3}\sin x+C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$ $\qquad$ $\displaystyle[\ -\frac{1}{3\sin^3 x}+C\ ]$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ $\qquad [\ -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\ ]$

(NP) Integrace goniometrických funkcí.

a) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\,dx$ $\qquad [\ \frac{1}{4}\sin^4 x + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \cos^5 2x \sin 2x\,dx$ $\qquad [\ -\frac{\cos^6 x}{12} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$ $\qquad [\ -\ln|\sin x + \cos x|C\ ]$

(49) Integrace iracionálních funkcí.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$ $\qquad [\ 2(\sqrt{x} - \ln|\sqrt{x}+1|) + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx$ $\qquad [\ -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})}\,dx$ $\qquad [\ \frac{12}{5}\sqrt[12]{x} - 21\sqrt[12]{x^4} + 4\sqrt[12]{x^3} + 30\sqrt[12]{x^2} +$

$12\sqrt[12]{x} + 24\ln|\sqrt[12]{x}+1| + 36\ln|\sqrt[12]{x}+1| + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{1 + \sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x+1}\,dx$ $\qquad [\ -2\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 2\ln\left|\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1\right| + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx$ $\qquad [\ x - 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}+1| + C\ ]$

(NP) Integrace iracionálních funkcí.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\qquad [\ 3\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \sqrt[3]{x} + \ln|1+\sqrt[3]{x}|\right) + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\qquad [\ -6\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C\ ]$

(50) Výpočet určitého integrálu – úpravou.

a) $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x}\,dx$ $\qquad [\ \ln\frac{5}{3}\ ]$

b) $\displaystyle\int_0^3 |1-3x|\,dx$ $\qquad [\ \frac{65}{6}\ ]$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$ $\qquad [\ 0\ ]$

(51) Výpočet určitého integrálu – metoda per partes.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ [π]

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(x+2) \, dx$ [$3\ln 3 - 2$]

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arccos x \, dx$ [π]

d) $\displaystyle\int_0^{1} e^{3x} x \, dx$ [$\dfrac{2}{9}e^3 + \dfrac{1}{9}$]

(52) Výpočet určitého integrálu – substituční metoda.

a) $\displaystyle\int_1^{4} \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} \, dx$ [$2\ln\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3}$]

b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x \cos x} \, dx$ [$\dfrac{1}{3}$]

c) $\displaystyle\int_1^{5} \frac{\ln x}{x} \, dx$ [$\dfrac{1}{2}\ln^2 5$]

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$ [$\dfrac{1}{3}$]

(NP) Výpočet určitého integrálu.

a) $\displaystyle\int_{-7}^{5} |x+1| \, dx$ [36]

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cosh x \, dx$ [$e - \dfrac{1}{e}$]

c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{(2x+1)^3} \, dx$ [$\dfrac{2}{9}$]

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx$ [$\sqrt{2} - 1$]

(53) Vypočtěte obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného křivkami $x^2 + y^2 = 1$, $y = 1 - x$, $x \geq 0$, $y > 0$.

[$\dfrac{\pi - 2}{4}$]

(54) Vypočtěte délku oblouku rovinné křivky $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$.

[$2 + \frac{1}{2}\ln 3$]

(55) Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy P kolem osy x. $P: y = -x^2+1$, $y = -2x^2 + 2$.

[$\frac{16}{5}\pi$]

(56) Vypočtěte povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy x. $P: x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$.

[$\frac{6\pi a^2}{2}$]

(57) Najděte těžiště homogenní hmotné oblasti omezené křivkami $y = x^2$, $y = \frac{2}{1+x^2}$.

[$T\left(0; \frac{24+15\pi}{30\pi - 20}\right)$]

NP Stanovte definiční obor dané funkce a načrtněte jej.

a) $z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$ b) $z = 2\sqrt{y - x^2} + 5\sqrt{x - y^2}$

c) $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ d) $z = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin 2xy$

[a) $Dz = \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$; b) $Dz = \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq x^2 \wedge x \geq y^2\}$; c) $Dz = \mathbb{E}_2 - \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y = x \wedge y = -x\}$; d) $Dz = \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 2\} \cap (\{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq -\frac{1}{2x} \wedge x > 0\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \leq -\frac{1}{2x} \wedge x < 0\}) \cup \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \leq \frac{1}{2x} \wedge x > 0\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq \frac{1}{2x} \wedge x < 0\}$]

NP Vypočtěte parciální derivace prvního řádu daných funkcí.

a) $z = \frac{3xy}{x - y}$ b) $z = (\sin x)^{\cos y}$

c) $z = xye^{\sin \pi xy}$ d) $y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$

[a) $z'_x = -\dfrac{3y^2}{(x-y)^2}$, $z'_y = -\frac{3x^2}{(x-y)^2}$;

b) $z'_x = \cos x \cos y (\sin x)^{\cos y - 1}$, $z'_y = -\sin y \ln \sin x (\sin x)^{\cos y}$;

c) $z'_x = y(1 + \pi xy \cos \pi xy)z$, $z'_y = x(1 + \pi xy \cos \pi xy)z$;

d) $z'_x = \dfrac{-2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \dfrac{-2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$]

NP Vypočtěte parciální derivace prvního řádu daných funkcí.

a) $z = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \dfrac{x+y}{xy}$ b) $z = (2x+y)^{2x+y}$

[a) $z'_x = -\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{xy-x-y}{xy+x+y}}, z'_y = -\dfrac{1}{y^2}\sqrt{\dfrac{xy-x-y}{xy+x+y}}$;

b) $z'_x = 2[1 + \ln(2x+y)]z, z'_y = [1 + \ln(2x+y)]z$]

NP Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu daných funkcí.

a) $z = \dfrac{cosx^2}{y}$ b) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$

[a) $x''_{xx} = -\dfrac{2\sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y}$, $z''_{yy} = \dfrac{2\cos x^2}{y^3}$, $z''_{xy} = \dfrac{2x \sin x^2}{y^2}$; b) $z''_{xx} = \dfrac{4y}{9x^{\frac{7}{3}}}$, $z''_{yy} = \dfrac{-x}{4\sqrt{y^3}}$, $z''_{xy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} - \dfrac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$]

NP Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu daných funkcí.

a) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ b) $z = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

[a) $z''_{xx} = \dfrac{-3xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$, $z''_{xy} = \dfrac{y(2x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$, $z''_{yy} = \dfrac{-x(x^2+2y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$; b) $z''_{xx} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{xy} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{yy} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$]

NP Vypočtěte všechny požadované derivace daných funkcí.

a) $z = e^x \ln y + \sin y \ln x,\ x'''_{xyy} =?,\ x'''_{yyy} =?$ b) $z = x^2 y + e^{xy^2},\ z'''_x xy =?$

[a) $z'''_{xyy} = -\frac{e^x}{y^2} - \frac{\sin y}{x}$, $z'''_{yyy} = \frac{2e^x}{y^3} - \cos y \ln x$; b) $z'''_{xxy} = 2 + e^{xy^2} y^3(4 + 2xy^2)$]

NP Určete d^2z v bodě A funkce $z = f(x, y)$.

a) $z = \sin x \sin y,\ A = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ b) $z = y \ln x,\ A = (1, 1)$

[a) $-\frac{1}{2}dx^2 - dxdy - \frac{1}{2}dy^2$; b) $-dx^2 + 2dxdy$]

NP Určete d^2z v bodě A funkce $z = f(x, y)$.

a) $z = e^{xy}, A = [1, 2]$

[a) $4e^2dx^2 + 6e^2dxdy + e^2dy^2$]

Taylorova věta pro funkci $f(x)$, $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$:

$$f(X) = f(X_o) + \frac{1}{1!}df(X_o) + \frac{1}{2!}d^2f(X_o) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(X_o) + R_{n+1}(X),$$

kde zbytek $R_{n+1}(X) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_1 + \delta h_1, \ldots, x_n + \delta h_n)$, $\delta \in (0, 1)$.

NP Napište Taylorův polynom stupně n pro funkci $y = f(x, y)$ v bodě A.

a) $z = e^x \sin y,\ A = [0, 0],\ n = 3$
b) $z = \sin(xy),\ A = [0, \frac{\pi}{2}],\ n = 2$

[a) $y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3$; b) $\frac{\pi}{2}x + x(y - \frac{\pi}{2})$]

NP Napište Taylorův polynom stupně n pro funkci $y = f(x, y)$ v bodě A.

a) $z = \ln(1 - x)\ln(1 - y),\ A = [0, 0],\ n = 3$

[a) $xy + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2$]

Pravidla pro počítání složených funkcí:

- $z = f(x, y)$, $x = x(t)$ a $y = y(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{dy}{dt}$$

- $w = f(x,y,z)$, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ a $z = z(u,v)$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$

- Obecně: $w = f(x_1,\dots,x_m)$, $x_k = x_k(t_1,\dots,t_n)$, pro $k = 1,\dots,m$

$$\frac{\partial w}{\partial t_i} = \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \left(\frac{\partial w}{\partial x_m}\right)\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_i},$$

kde $i = 1,2,\dots,n$.

NP Vypočtěte parciální derivace prvního řádu složených funkcí.

a) $z = u + v^2,\ u = x^2 + \sin y,\ v = \ln(x+y)$
b) $z = u^2v - v^2u,\ u = x\cos y,\ v = x\sin y$

[a) $z'_x = 2x + \dfrac{2}{x+y}\ln(x+y)$, $z'_y = \cos y + \frac{2}{x+y}\ln(x+y)$; b) $z'_x = 3x^2\sin y\cos y(\cos y - \sin y)$, $z'_y = x^3(\sin y + \cos y)(1 - 3\sin y\cos y)$]

NP Vypočtěte parciální derivace prvního řádu složených funkcí.

a) $z = u^v$, $u = \ln(x+y)$, $v = e^{\frac{x}{y}}$

[a) $z'_x = vu^{v-1}\dfrac{1}{x-y} + u^v\ln v\dfrac{e^{\frac{x}{y}}}{y}$, $z'_y = \dfrac{vu^{v-1}}{y-x} + u^v\ln u\dfrac{-e^{\frac{y}{y}}}{y^2}$]

NP Určete první parciální derivace funkce $z = f(x,y)$, která je dána implicitně danou rovnicí.

a) $\cos(ax + by - cz) = k(ax + by - cz)$
b) $x + y + z = e^z$

[a) $z'_x = \dfrac{a}{c}$, $z'_y = \dfrac{b}{c}$; b) $z'_x = \dfrac{1}{(x+y+z-1)} = z'_y$]

NP Vypočtěte první parciální derivace v bodě A funkce $z = f(x,y)$, která je dána implicitně danou rovnicí.

a) $e^z + x^2y + z + 5 = 0,\ A = [1,-6,0]$
NP) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = 0,\ A = \left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6}\right]$

[a) $z'_x(A) = 6$, $z'_y(A) = -\dfrac{1}{2}$, NP) $z'_x(A) = -1$, $z'_y(A) = 0$]

Tečná rovina a normála plochy:

Tečná rovina τ a normála n plochy $z = f(x, y)$ v bodě $B_0 = [x_0; y_0; z_0]$ jsou dány rovnicemi tvaru:

τ : $\quad (x - x_0) \cdot f_x(B_0) + (y - y_0) \cdot f_y(B_0) - (z - z_0) = 0$

n : $\quad \dfrac{x - x_0}{f_x(B_0)} = \dfrac{y - y_0}{f_y(B_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$

Je-li plocha dána implicitně $F(x; y; z) = 0$, pak

τ : $\quad (x - x_0) \cdot F_x(B_0) + (y - y_0) \cdot F_y(B_0) + (z - z_0) \cdot F_z(B_0) = 0$

n : $\quad \dfrac{x - x_0}{F_x(B_0)} = \dfrac{y - y_0}{F_y(B_0)} = \dfrac{z - z_0}{F_z(B_0)}$

Pro normálový vektor $\vec{n}$ tečné roviny platí $\vec{n} = (F_x(B_0); F_y(B_0); F_z(B_0))$. Normálu si můžeme vyjádřit parametricky ve tvaru:

$$x = x_0 + tF_x(B_0),\ \ y = y_0 + tF_y(B_0),\ \ z = z_0 + tF_z(B_0);\ \ t \in \mathbb{R}.$$

NP Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě A plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně danou rovnicí.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0,\ \ A = [2, -6, ?]$
b) $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5,\ \ A = [1, 1, 2]$

[a) τ_1 : $2x - 6y + 3z - 49 = 0$, $\vec{n_1}$: $x = 2 + 4t, y = -6 - 12t, z = 3 + 6t$, τ_2 : $2x - 6y - 3z - 49 = 0$, $\vec{n_2}$: $x = 2 + 4t, y = -6 - 12t, z = -3 - 6t$]

NP Nalezněte lokální extrémy daných funkcí.

a) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$
b) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
c) $z = \ln\dfrac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$

[a) $[4; 4]$ - lok.max.; b) $[-1; 2]$ - není, $[0; 0]$ - lok.min., $[-1; -2]$ a $\left[-\frac{5}{2}; 0\right]$ - lok.max., $[3; 6]$ - lok.max.]

NP Nalezněte lokální extrémy daných funkcí.

a) $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$
b) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

[a) $[5; 2]$ - lok.min.; b) $[4; 4]$ - lok.max.]

NP Nalezněte vázané extrémy dané funkce při daných podmínkách.

a) $z = x + 2y$; podm. $x^2 + y^2 = 5$
b) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; podm. $x + y = 2$

[a) $[1; 2]$ - lok.max., $[-1; -2]$ - lok.nim.; b) $[1; 1]$ - lok.min.]

NP Nalezněte vázané extrémy dané funkce při daných podmínkách.

a) $z = x + y$; podm. $xy = 1$
b) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; podm. $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

[a) $[1; 1]$ - lok.max., $[-1; -1]$ - lok.nim.; b) $[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ - lok.min., $[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ - lok.max.]

NP Najděte absolutní extrémy daných funkcí.

a) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$; na obdélníku $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$
b) $z = x^2 - xy + y^2$; Mje určena nerovnicí $|x| + |y| \leq 1$
c) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$; na oblasti dané nerovnicí $x^2 + y^2 \leq 25$

[a) $[1; 2]$ - abs.max., $[1; 0]$ - abs.nim.; b) $[0; 1]$, $[0; -1]$, $[1; 0]$, $[-1; 0]$ - abs.max., $[0; 0]$ - abs.min.; c) $[3; -4]$ - abs.min., $[-3; 4]$ - abs.max.]

NP Určete derivaci ve směru $\vec{s}$ v bodě A a gradient v bodě A funkce $z = f(x, y)$.
$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $A = [3; 4]$, $\vec{s} = (3; 4)$.

[$\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\dfrac{19}{5}$, grad $z = -\dfrac{17}{5}\vec{i} - \dfrac{11}{5}\vec{j}$]

NP Určete derivaci funkce $z = \ln(x^2 + y^2)$ v bodě $A = [1; 2]$.
a) ve směru tečného vektoru v bodě A ke křivce $y = 2\sqrt{x}$,
b) ve směru, v němž je derivace maximální.

[a) $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$; b) $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\dfrac{2}{5}\sqrt{2}$]

NP Určete tečnou rovinu a normálu v bodě T plochy $z = f(x, y)$.
$z = xy^2 - x^2y$, $T = [2; 1; ?]$.

[$\tau : 3x + z - 4 = o$; $\vec{n} : x = 2 + 3t, y = 1, z = -2 + t$]

NP Určete tečnou rovinu a normálu v bodě T plochy $z = f(x, y)$.
$z = \dfrac{y^2}{x^2}$, $T = [-1; 2; ?]$.

[$\tau : 8x + 4y - z44 = o$; $\vec{n} : x = -1 + 8t, y = 2 + 4t, z = 4 - t$]

NP Nalezněte obecné řešení daných diferenciálních rovnic.

a) $y' = 10^{x+y}$ [$10^x + 10^{-y} = C$]

b) $y' = -\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$ [$\arcsin y + \arcsin x = C$]

NP Nalezněte partikulární řešení dané diferenciální rovnice.

$x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0,\ y(-2) = 1$ [$y^2 = \dfrac{2}{5}x^2 - \dfrac{3}{5}$]

Reference

[1] Novotný J.: *Matematika I - Základy lineární algebry*, CERM, FAST VUT Brno 2004.
[2] Dlouhý, O. - Tryhuk, V.: *Matematika I - Diferenciální počet funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 2004.
[3] Tryhuk, V.: *Matematika I1 - Úvod do matematické logiky a teorie množin*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
[4] Tryhuk, V.: *Matematika I2 - Reálná funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
[5] Veverka, J. - Slatinský E.: *Matematika I3 - Diferenciální pocet funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[6] Novotný J.: *Matematika I4 - Lineární algebra*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[7] Horňáková, D.: *Matematika I5 - Vektorová algebra*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[8] Horňáková, D.: *Matematika I6 - Analytická geometrie*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[9] Voráček, J.: *Matematika I7 - Neurčitý integrál*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[10] Voráček, J.: *Matematika II1 - Určitý integrál a jeho užití*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[11] Daněček, J. - Dlouhý, O.: *Integrální počet I*, CERM, FAST VUT Brno 2003.
[12] Daněček, J. - Dlouhý, O. - Koutková, H. - Prudilová, K. - Sekaninová, J. - Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematiky I.*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
[13] Čermáková, H. - Hřebíčková, J. - Slaběňáková, J. - Šafářová, H.: *Sbírka příkladů z matematiky II.*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
[14] Prudilová, K. - Sekaninová, J. - Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematiky III.*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[15] Hřebíčková, J. - Ráček, J. - Slaběňáková, J.: *Diferenciální počet v Maple 7*, FAST VUT Brno, 2001, http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/matematika/diferencialni_pocet/.
[16] Hřebíčková, J. - Ráček, J. - Slaběňáková, J.: *Integrální počet v Maple 7*, FAST VUT Brno, 2001, http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/matematika/integralni_pocet/.
[17] Veverka, J.: *Diferenciální počet II*, Fakulta stavební, Brno 1982.
[18] Eliaš, J. - Horvát, J. - Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1. časť*, SVTL, Bratislava 1965.
[19] Černá, B.: *Cvičení z lineární algebry*, MZLU v Brně, Brno 1998.
[20] Jelínek, Z. - Samotná O.: *Matematika - Integrální počet*, Skriptum VŠ zemědělské v Brně, SPN, Praha 1985.
[21] Jirásek, F. - Kriegelstein, E. - Tichý, Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky I*, SNTL/ALFA, Praha 1987.
[22] Karásek, J. - Maroš, B.: *Integrální počet, Matematika - Metodické pokyny pro cvičení*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
[23] Kříž, J. - Křížová, H.: *Diferenciální počet, metodické pokyny*, Fakulta strojní VUT, Brno 1978.
[24] Vosmanská, G.: *Matematika*, MZLU v Brně, Brno 1997.
[25] Online verze textů: *Riešené úlohy z matematiky 1*, Katedra Matematiky a Deskriptivnej geometrie, Stavebna fakulta, STU, Bratislava, http://www-kmadg.svf.stuba.sk/skripta/skripta.pdf.
[26] Online verze textů: *Riešené úlohy z matematiky 2*, Katedra Matematiky a Deskriptivnej geometrie, Stavebna fakulta, STU, Bratislava, http://www-kmadg.svf.stuba.sk/skripta2/skripta2.pdf.