Vysoké učení technické v Brně Fakulta stavební

ÚSTAV MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

BAA009 – Matematika II (G)

Cvičení, letní semestr

DOMÁCÍ ÚLOHY

Mgr. et Mgr. Jan Šafařík, Ph.D.

Brno

Základní vzorce na integrovaní

- ✓ $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c,$

- ✓ $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c,$

- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c, x \neq (2k+1)\frac{1}{2}\pi,$

- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c, x \neq k\pi,$

- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c,$

- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + c,$

- ✓ $\displaystyle\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + c,$

- ✓ $\displaystyle\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + c,$

- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tgh} x + c,$

- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotgh} x + c,$

- ✓ $\displaystyle\int c f(x) \,\mathrm{d}x = c \int f(x) \,\mathrm{d}x,$

- ✓ $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x)) \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x \pm \int g(x) \,\mathrm{d}x,$

  $\Longrightarrow$

- ✓ $\displaystyle\int (k_1 f_1(x) \pm \cdots \pm k_n f_n(x)) \,\mathrm{d}x = k_1 \int f_1(x) \,\mathrm{d}x \pm \cdots \pm k_n \int f_n(x) \,\mathrm{d}x.$

Odvozené vzorce na integrování

- ✓ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c,$

  Užitím substituce $f(x) = t$.

- ✓ $\displaystyle\int f(ax+b) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax+b) + c.$

  Užitím substituce $ax + b = t$.

✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}}\, \mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c, B \neq 0,$

Užitím Eulerovy substituce $\sqrt{x^2 \pm B} = t - x$.

Následující odvozené vzorce lze v technické praxi použít, ale v předmětu BAA009 je nutné umět celý výpočet odvození!

✓ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + A^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + c,$

Užitím vztahu $\displaystyle\int \frac{1}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$ *a substituce.*

✓ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - A^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2A} \ln\left|\frac{x - A}{x + A}\right| + c, A > 0, |x| \neq A,$

Užitím rozkladu na parciální zlomky.

✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{A} + c, A > 0, |x| < A,$

Užitím vztahu $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x = \arcsin x + c$ *a substituce.*

(1) Integrace užitím základních vzorců.

a) $\displaystyle\int \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ $\quad [\ \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{14}{3}\sqrt{x^3} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{4}{3x^2}\right) dx$ $\quad [\ \frac{28}{15}\sqrt{x^5} + \frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{3x} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \left(10^x - 2^x + 5^{2x}\right) dx$ $\quad [\ \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3}\, dx$ $\quad [\ x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$ $\quad [-\frac{1}{x} + x - 2\ln|x| + C\ ]$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 + 1}\, dx$ $\quad [\ x - \operatorname{arctg} x + C\ ]$

g) $\displaystyle\int \frac{5\sin^2 x + 3\cos^2 x}{2\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$ $\quad [\ \frac{5}{2}\operatorname{tg} x - \frac{3}{2}\operatorname{cotg} x + C\ ]$

(T1) Integrace užitím základních vzorců.

a) $\displaystyle\int (3x^2 + 2x - 1)\, dx$ $\quad [\ x^3 + x^2 - x + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x}\, dx$ $\quad [\ \frac{x^3}{3} + 3x - \ln|x| + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{x}\,dx$ $\qquad [\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}+6x+24\sqrt{x}+8\ln|x|+C\ ]$

(NP) Integrace užitím základních vzorců.

a) $\displaystyle\int x^2(x^2+1)\,dx$ $\qquad [\ \frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+C\ ]$

b) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$ $\qquad [\ \frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{6}{5}x^2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C\ ]$

(2) Integrace substituční metodou.

a) $\displaystyle\int (4x-3)^4\,dx$ $\qquad [\ \frac{1}{20}(4x-3)^5+C\ ]$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x-7)^5}\,dx$ $\qquad [\ -\frac{1}{8}\frac{1}{(2x-7)^4}+C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{2-49x^2}}\,dx$ $\qquad [\ \frac{5}{7}\arcsin\frac{7x}{\sqrt{2}}+C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x+1}\,dx$ $\qquad [\ \ln|\sin x+1|+C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ $\qquad [\ \ln|e^x+1|+C\ ]$

f) $\displaystyle\int \sin x\cos^3 x\,dx$ $\qquad [\ -\frac{1}{4}\cos^4 x+C\ ]$

g) $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\,dx$ $\qquad [\ e^{\sin x}+C\ ]$

(NP) Integrace substituční metodou.

a) $\displaystyle\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}\,dx$ $\qquad [\ \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 e^x}+C\ ]$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad [\ \arccos\frac{1}{x}+C\ ]$

c) $\displaystyle\int \sin^6 x\cos x\,dx$ $\qquad [\ \frac{1}{7}\sin^7 x+C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ $\qquad [\ -e^{\frac{1}{x}}+C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$ $\qquad [\ \sin(\ln x)+C\ ]$

(3) Integrace metodou per partes.

a) $\displaystyle\int xe^x\,dx$ $\qquad [\ e^x(x-1)+C\ ]$

b) $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$ $\qquad [\ -\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C\ ]$

c) $\displaystyle\int x^3e^{x^2}\,dx$ $\qquad [\ \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+C\ ]$

d) $\displaystyle\int \ln x\,dx$ $\qquad [\ x\ln x-x+C\ ]$

e) $\displaystyle\int \ln^3 x\cdot x\,dx$ $\qquad [\ \frac{x^2}{2}(\ln^3 x-\frac{3}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}\ln x-\frac{3}{4})+C\ ]$

f) $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,dx$ $\qquad [\frac{1}{2}\ln(x+1)(x^2-1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+C\ ]$

(NP) Integrace metodou per partes.

a) $\displaystyle\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$ $\quad\left[\ -\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{cotg} x + C\ \right]$

b) $\displaystyle\int x\sinh x\,dx$ $\quad[\ x\cosh x - \sinh x + C\ ]$

c) $\displaystyle\int 5xe^{-4x}\,dx$ $\quad\left[\ -\frac{5}{4}xe^{-4x}-\frac{5}{16}e^{-4x}+C\ \right]$

d) $\displaystyle\int e^x\cos 2x\,dx$ $\quad\left[\ \frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + C\ \right]$

e) $\displaystyle\int (x^2-2x+5)e^{-x}\,dx$ $\quad[\ -e^{-x}(x^2+5)+C\ ]$

(4) Integrace racionální lomené funkce.

a) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+2x+5}\,dx$ $\quad\left[\ \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C\ \right]$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+3}\,dx$ $\quad\left[\ \frac{1}{2}\ln\left|x^2-3x+3\right| + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C\ \right]$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x^2-x-12)}\,dx$ $\quad\left[\ \ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C\ \right]$

d) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx$ $\quad[\ -\ln|e^x| + 2\ln|e^x-1| + C\ ]$

e) $\displaystyle\int \frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}\,dx$ $\quad\left[\ -\frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln|(x-1)(x+1)^2| + C\ \right]$

(T2) Integrace racionální lomené funkce.

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}\,dx$ $\quad\left[\ \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C\ \right]$

(NP) Integrace racionální lomené funkce.

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$ $\quad\left[\ \ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C\ \right]$

b) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx$ $\quad\left[\ x - \frac{5}{2}\ln(x^2+3x+4) + \frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C\ \right]$

(5) Integrace goniometrických funkcí.

a) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$ $\quad\left[\ \frac{1}{2}\sin^2 x + C\ \right]$

b) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$ $\quad[\ -\ln|\cos x| + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}\,dx$ $\quad\left[\ \frac{\sin x - 2}{\cos x} + C\ \right]$

d) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$ $\quad\left[\ \frac{1}{3}\sin x\cos^2 x + \frac{2}{3}\sin x + C\ \right]$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ $\quad\left[\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| + C\ \right]$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$ $\quad\left[\ \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + 2\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}\right) + C\ \right]$

(NP) Integrace goniometrických funkcí.

a) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$ $\quad [\ \frac{1}{4}\sin^4 x + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \cos^5 2x\sin 2x\,dx$ $\quad [\ -\frac{\cos^6 x}{12} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$ $\quad [\ -\ln|\sin x + \cos x| C\ ]$

(6) Integrace iracionálních funkcí.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$ $\quad [\ 2(\sqrt{x} - \ln|\sqrt{x}+1|) + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx$ $\quad [\ -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C\ ]$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})}\,dx$ $\quad [\ \frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5} - 21\sqrt[12]{x^4} + 4\sqrt[12]{x^3} + 30\sqrt[12]{x^2} + 12\sqrt[12]{x} + 24\ln|\sqrt[12]{x}+1| + 36\ln|\sqrt[12]{x}-1| + C\ ]$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx$ $\quad [\ x - 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}+1| + C\ ]$

(T3) Integrace iracionálních funkcí.

$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\quad [\ -6\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C\ ]$

(NP) Integrace iracionálních funkcí.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\quad [\ 3\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \sqrt[3]{x} + \ln|1+\sqrt[3]{x}|\right) + C\ ]$

b) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x+1}\,dx$ $\quad [\ -2\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 2\ln\left|\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1\right| + C\ ]$

(7) Výpočet určitého integrálu – úpravou.

a) $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x}\,dx$ $\quad [\ \ln\frac{5}{3}\ ]$

b) $\displaystyle\int_0^3 |1-3x|\,dx$ $\quad [\ \frac{65}{6}\ ]$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}}\,dx$ $\quad [\ 0\ ]$

(8) Výpočet určitého integrálu – metoda per partes.

a) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$ $\quad [\ \pi\ ]$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln(x+2)\,dx$ $\quad [\ 3\ln 3 - 2\ ]$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \arccos x\,dx$ $\quad [\ \pi\ ]$

d) $\displaystyle\int_0^1 e^{3x} x\,dx$ $\quad\left[\ \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\ \right]$

(9) Výpočet určitého integrálu – substituční metoda.

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}\,dx$ $\quad\left[\ 2\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\ \right]$

b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x \cos x}\,dx$ $\quad\left[\ \frac{1}{3}\ \right]$

c) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\ln x}{x}\,dx$ $\quad\left[\ \frac{1}{2}\ln^2 5\ \right]$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,dx$ $\quad\left[\ \frac{1}{3}\ \right]$

(NP) Výpočet určitého integrálu.

a) $\displaystyle\int_{-7}^5 |x+1|\,dx$ $\quad[\ 36\ ]$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \cosh x\,dx$ $\quad\left[\ e - \frac{1}{e}\ \right]$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}\,dx$ $\quad\left[\ \frac{2}{9}\ \right]$

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ $\quad[\ \sqrt{2}-1\ ]$

(10) Vypočtěte obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného křivkami $x^2 + y^2 = 1$, $y = 1 - x$, $x \geq 0$, $y > 0$.

$\left[\ \frac{\pi - 2}{4}\ \right]$

(11) Vypočtěte délku oblouku rovinné křivky $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $x \in \langle 1, 3\rangle$.

$\left[\ 2 + \frac{1}{2}\ln 3\ \right]$

(12) Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy P kolem osy x. $P: y = -x^2 + 1$, $y = -2x^2 + 2$.

$\left[\ \frac{16}{5}\pi\ \right]$

NP Vypočtěte povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy x. $P: x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$, $a > 0$.

$\left[\ \frac{6\pi a^2}{2}\ \right]$

NP Najděte těžiště homogenní hmotné oblasti omezené křivkami $y = x^2$, $y = \frac{2}{1+x^2}$.

$\left[\ T\left(0; \frac{24 + 15\pi}{30\pi - 20}\right)\ \right]$

NP Stanovte definiční obor dané funkce a načrtněte jej.

a) $z = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$ b) $z = 2\sqrt{y-x^2} + 5\sqrt{x-y^2}$

c) $z = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ d) $z = \arcsin(1-x^2-y^2) + \arcsin 2xy$

[a) $Dz = \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : -x^2-1 \leq y \leq -x^2+1\}$; b) $Dz = \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq x^2 \wedge x \geq y^2\}$; c) $Dz = \mathbb{E}_2 - \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y = x \wedge y = -x\}$; d) $Dz = \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : x^2+y^2 \leq 2\} \cap (\{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq -\frac{1}{2x} \wedge x > 0\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \leq -\frac{1}{2x} \wedge x < 0\}) \cup \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \leq \frac{1}{2x} \wedge x > 0\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq \frac{1}{2x} \wedge x < 0\}$]

(13) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu daných funkcí.

a) $z = \dfrac{3xy}{x-y}$ b) $z = (\sin x)^{\cos y}$

c) $z = xye^{\sin \pi xy}$ d) $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$

[a) $z'_x = -\dfrac{3y^2}{(x-y)^2}$, $z'_y = \dfrac{3x^2}{(x-y)^2}$;
b) $z'_x = \cos x \cos y (\sin x)^{\cos y - 1}$, $z'_y = -\sin y \ln \sin x (\sin x)^{\cos y}$;
c) $z'_x = e^{\sin \pi xy} y(1+\pi xy \cos \pi xy)$, $z'_y = e^{\sin \pi xy} x(1+\pi xy \cos \pi xy)$;
d) $z'_x = \dfrac{-2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \dfrac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$]

NP Vypočtěte parciální derivace prvního řádu daných funkcí.

a) $z = \sqrt{1-\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \dfrac{x+y}{xy}$ b) $z = (2x+y)^{2x+y}$

[a) $z'_x = -\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{xy-x-y}{xy+x+y}}$, $z'_y = -\dfrac{1}{y^2}\sqrt{\dfrac{xy-x-y}{xy+x+y}}$;
b) $z'_x = 2[1+\ln(2x+y)]z$, $z'_y = [1+\ln(2x+y)]z$]

(14) Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu daných funkcí.

a) $z = \dfrac{\cos x^2}{y}$ b) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$

[a) $x''_{xx} = -\dfrac{2\sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y}$, $z''_{yy} = \dfrac{2\cos x^2}{y^3}$, $z''_{xy} = \dfrac{2x \sin x^2}{y^2}$; b) $z''_{xx} = \dfrac{4y}{9x^{\frac{7}{3}}}$, $z''_{yy} = \dfrac{-x}{4\sqrt{y^3}}$, $z''_{xy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} - \dfrac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$]

NP Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu daných funkcí.

a) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ b) $z = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

[a) $z''_{xx} = \dfrac{-3xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$, $z''_{xy} = \dfrac{y(2x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$, $z''_{yy} = \dfrac{-x(x^2+2y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$; b) $z''_{xx} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{xy} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{yy} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$]

(15) Vypočtěte všechny požadované derivace daných funkcí.

a) $z = e^x \ln y + \sin y \ln x,\ x'''_{xyy} = ?,\ x'''_{yyy} = ?$ b) $z = x^2y + e^{xy^2},\ z'''_{xxy} = ?$

[a) $z'''_{xyy} = -\dfrac{e^x}{y^2} - \dfrac{\sin y}{x}$, $z'''_{yyy} = \dfrac{2e^x}{y^3} - \cos y \ln x$; b) $z'''_{xxy} = 2 + e^{xy^2}y^3(4+2xy^2)$]

NP Určete d^2z v bodě A funkce $z = f(x,y)$.

a) $z = \sin x \sin y,\ A = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ b) $z = y \ln x,\ A = (1,1)$

[a) $-\frac{1}{2}dx^2 - dxdy - \frac{1}{2}dy^2$; b) $-dx^2 + 2dxdy$]

NP Určete d^2z v bodě A funkce $z = f(x,y)$.

a) $z = e^{xy}, A = [1,2]$

[a) $4e^2dx^2 + 6e^2dxdy + e^2dy^2$]

Taylorova věta pro funkci $f(x)$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$:

$$f(X) = f(X_o) + \frac{1}{1!}df(X_o) + \frac{1}{2!}d^2f(X_o) + \dots + \frac{1}{n!}d^nf(X_o) + R_{n+1}(X),$$

kde zbytek $R_{n+1}(X) = \dfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_1 + \delta h_1, \dots, x_n + \delta h_n)$, $\delta \in (0,1)$.

(16) Napište Taylorův polynom stupně n pro funkci $y = f(x,y)$ v bodě A.

a) $z = e^x \sin y,\ A = [0,0],\ n = 3$
b) $z = \sin(xy),\ A = [0, \frac{\pi}{2}],\ n = 2$

[a) $y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3$; b) $\frac{\pi}{2}x + x(y - \frac{\pi}{2})$]

NP Napište Taylorův polynom stupně n pro funkci $y = f(x,y)$ v bodě A.

a) $z = \ln(1-x)\ln(1-y),\ A = [0,0],\ n = 3$

[a) $xy + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2$]

Pravidla pro počítání složených funkcí:

- $z = f(x,y)$, $x = x(t)$ a $y = y(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{dy}{dt}$$

- $w = f(x, y, z)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ a $z = z(u, v)$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial u},$$
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial v},$$

- Obecně: $w = f(x_1, \dots, x_m)$, $x_k = x_k(t_1, \dots, t_n)$, pro $k = 1, \dots, m$

$$\frac{\partial w}{\partial t_i} = \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \left(\frac{\partial w}{\partial x_m}\right) \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_i},$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$.

NP Vypočtěte parciální derivace prvního řádu složených funkcí.

a) $z = u + v^2,\ u = x^2 + \sin y,\ v = \ln(x + y)$
b) $z = u^2 v - v^2 u,\ u = x \cos y,\ v = x \sin y$

[a) $z'_x = 2x + \dfrac{2}{x+y} \ln(x+y)$, $z'_y = \cos y + \frac{2}{x+y} \ln(x+y)$; b) $z'_x = 3x^2 \sin y \cos y(\cos y - \sin y)$, $z'_y = x^3(\sin y + \cos y)(1 - 3 \sin y \cos y)$]

NP Vypočtěte parciální derivace prvního řádu složených funkcí.

a) $z = u^v$, $u = \ln(x + y)$, $v = e^{\frac{x}{y}}$

[a) $z'_x = vu^{v-1} \dfrac{1}{x-y} + u^v \ln v \dfrac{e^{\frac{x}{y}}}{y}$, $z'_y = \dfrac{vu^{v-1}}{y-x} + u^v \ln u \dfrac{-e^{\frac{y}{y}}}{y^2}$]

NP Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně danou rovnicí.

a) $\cos(ax + by - cz) = k(ax + by - cz)$
b) $x + y + z = e^z$

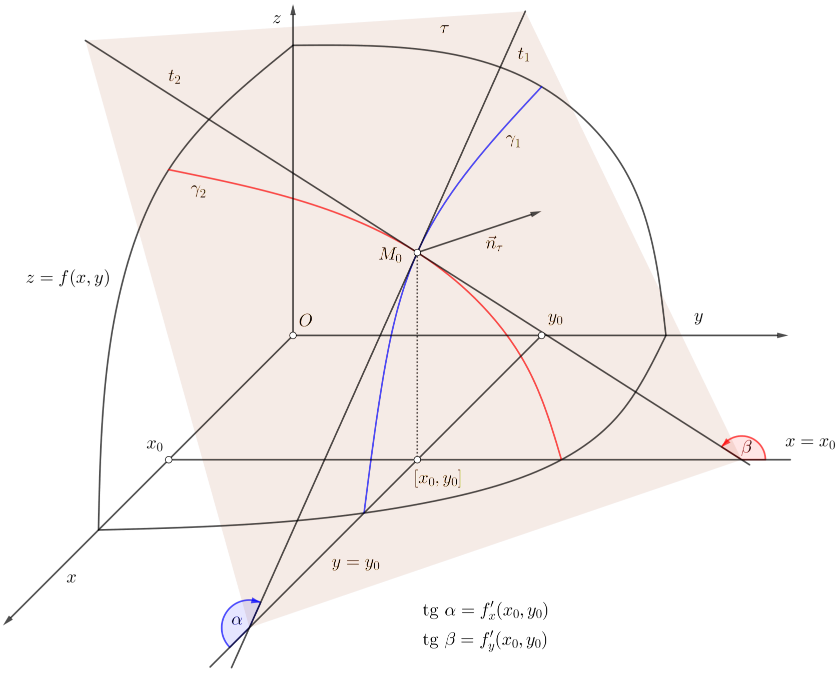
[a) $z'_x = \dfrac{a}{c}$, $z'_y = \dfrac{b}{c}$; b) $z'_x = \dfrac{1}{(x+y+z-1)} = z'_y$]

NP Vypočtěte první parciální derivace v bodě A funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně danou rovnicí.

a) $e^z + x^2 y + z + 5 = 0,\ A = [1, -6, 0]$
b) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = 0,\ A = \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}\right]$

[a) $z'_x(A) = 6$, $z'_y(A) = -\dfrac{1}{2}$, b) $z'_x(A) = -1$, $z'_y(A) = 0$]

Tečná rovina a normála plochy v bodě $M = [x_0, y_0, z_0]$



a) explicitní tvar plochy $z = f(xy)$

$$\tau: \quad z - z_0 = f'_x(M)(x - x_0) + f'_y(M)(y - y_0) \quad \text{nebo}$$
$$f'_x(M)(x - x_0) + f'_y(M)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$n: \quad \begin{aligned} x &= x_0 + f'_x(M) \cdot s \\ y &= y_0 + f'_y(M) \cdot s \qquad s \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 - s \end{aligned}$$

$$\vec{s}_n = \vec{n}_\tau = (f'_x(M), f'_y(M), -1)$$

b) implicitní tvar plochy $F(x, y, z) = 0$

$$\tau: \quad F'_x(M)(x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0$$

$$n: \quad \begin{aligned} x &= x_0 + F'_x(M) \cdot t \\ y &= y_0 + F'_y(M) \cdot t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 + F'_z(M) \cdot t \end{aligned}$$

$$\vec{s}_n = \vec{n}_\tau = (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M))$$

c) gradient v bodě $M = [x_0, y_0, z_0]$

$$\text{grad } f(x, y) = (f'_x(M), f'_y(M), -1)$$
$$\text{grad } F(x, y, z) = (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)$$
$$\text{grad } \perp \tau$$
$$\text{grad } \parallel n$$

Poznámky k příkladům:

i. Máte-li sestrojit tečnou rovinu nebo normálu plochy v zadaném bodě, dosadíte do výše uvedených vzorců

ii. Pokud řešíte úlohu sestrojit tečnou rovinu plochy, která je rovnoběžná se zadanou rovinou ρ, využijete faktu, že grad $f(x,y)$ resp. grad $F(x,y,z)$ je vlastně jen k-násobkem normálového vektoru zadané roviny:

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x,y) &= k \cdot \vec{n}_\rho \quad \text{nebo} \\ \text{grad } F(x,y,z) &= k \cdot \vec{n}_\rho \end{aligned}$$

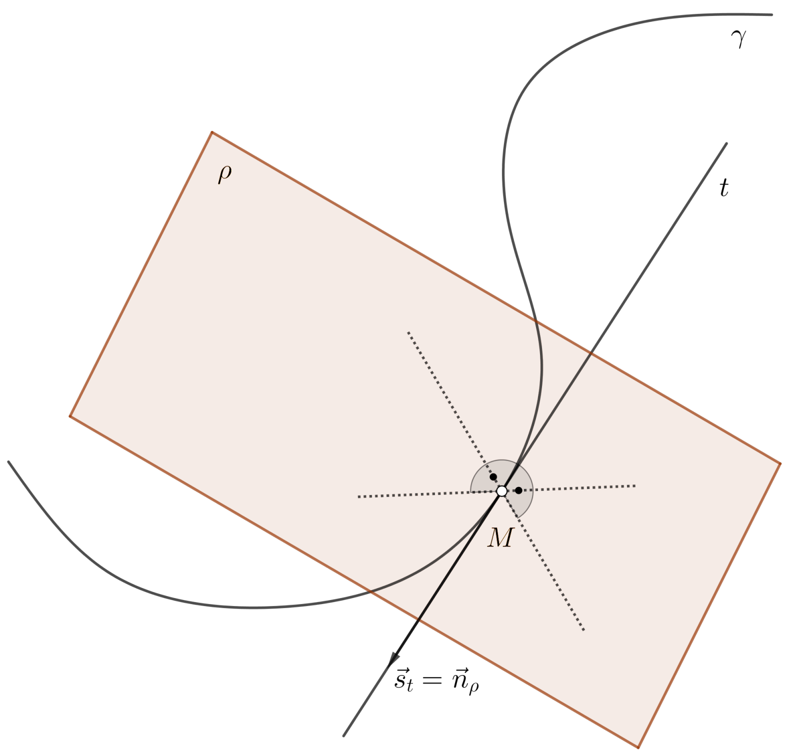
Odsud si vyjádříte x, y a z pomocí k a dosadíte do rovnice plochy. Hodnoty k mám určí tečné body, ve kterých je tečná rovina τ rovnoběžná se zadanou rovinou ρ. Dál se postupuje podle bodu 1.
Stejným způsobem řešíte hledání tečné roviny kolmé k zadané přímce p. Jen místo normálového vektoru budete uvažovat směrový vektor přímky $\vec{s}_p$.

iii. Řešíte-li úlohu sestrojit tečnou rovinu, která je kolmá k zadaným rovinám α a β, využijete vztahu:

$$\vec{n}_\tau \perp (\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta).$$

Dále postupujete podle 2.

Tečna a normálová rovina prostorové křivky v bodě $M = [x_0, y_0, z_0]$



$$\gamma: \quad \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \qquad t \in \langle \alpha, \beta \rangle \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

$$t: \quad \begin{aligned} x &= x_0 + x_t'(M) \cdot s \\ y &= y_0 + y_t'(M) \cdot s \qquad s \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 + z_t'(M) \cdot s \end{aligned}$$

$$\rho: \quad x_t'(M)(x - x_0) + y_t'(M)(y - y_0) + z_t'(M)(z - z_0) = 0$$

$$\vec{s}_t = \vec{n}_\rho = (x_t'(M), y_t'(M), z_t'(M))$$

Poznámky k příkladům:

i. Máte-li sestrojit tečnu nebo normálovou rovinu prostorové křivky v zadaném bodě, dosadíte do výše uvedených vzorců

ii. Pokud řešíte úlohu sestrojit tečnu prostorové křivky, která je dána jako průsečnice dvou ploch F a G, využijete vztahu:

$$\vec{s}_t \perp (\text{grad } F, \text{grad } G),$$

$\vec{s}_t$ tedy určíte pomocí vektorového součinu a poté dosadíte do výše uvedených vzorců.

iii. Řešíte-li úlohu sestrojit tečnu, která je kolmá k zadané rovině ν, využijete toho, že $\vec{s}_t \cdot \vec{n}_\nu = 0$.

NP Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě A plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně danou rovnicí.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0,\ A = [2, -6, ?]$
b) $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5,\ A = [1, 1, 2]$

[a) τ_1 : $2x - 6y + 3z - 49 = 0$, n : $x = 2 + 4t, y = -6 - 12t, z = 3 + 6t$, τ_2 : $2x - 6y - 3z - 49 = 0$, n : $x = 2 + 4t, y = -6 - 12t, z = -3 - 6t$; b) τ : $2x + y + 11z - 25 = 0$, n : $x = 1 + 2t, y = 1 + t, z = 2 + 11t$]

(17) Určete tečnou rovinu a normálu v bodě T plochy $z = f(x, y)$.
$z = xy^2 - x^2y$, $T = [2; 1; ?]$.

[$\tau : 3x + z - 4 = o$; $n : x = 2 + 3t, y = 1, z = -2 + t$]

NP Určete tečnou rovinu a normálu v bodě T plochy $z = f(x, y)$.
$z = \dfrac{y^2}{x^2}$, $T = [-1; 2; ?]$.

[$\tau : 8x + 4y - z44 = o$; $n : x = -1 + 8t, y = 2 + 4t, z = 4 - t$]

NP Určete derivaci ve směru $\vec{s}$ v bodě A a gradient v bodě A funkce $z = f(x, y)$.
$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $A = [3; 4]$, $\vec{s} = (3; 4)$.

[$\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\dfrac{19}{5}$, grad $z = -\dfrac{17}{5}\vec{i} - \dfrac{11}{5}\vec{j}$]

NP Určete derivaci funkce $z = \ln(x^2 + y^2)$ v bodě $A = [1; 2]$.
a) ve směru tečného vektoru v bodě A ke křivce $y = 2\sqrt{x}$,
b) ve směru, v němž je derivace maximální.

[a) $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$; b) $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\dfrac{2}{5}\sqrt{2}$]

(18) Nalezněte lokální extrémy daných funkcí.

a) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$
b) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
c) $z = \ln\dfrac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$

[a) $[4; 4]$ – lok. max.; b) $[-1; -2]$ a $[-1; 2]$ – není, $[0; 0]$ – lok. min., $\left[-\dfrac{5}{3}; 0\right]$ – lok. max.; c) $[3; 6]$ – lok. max.]

NP Nalezněte lokální extrémy daných funkcí.

a) $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$
b) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

[a) $[5; 2]$ – lok. min.; b) $[4; 4]$ – lok. max.]

NP Nalezněte vázané extrémy dané funkce při daných podmínkách.

a) $z = x + 2y$; podm. $x^2 + y^2 = 5$
b) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; podm. $x + y = 2$

[a) $[1; 2]$ – lok. max., $[-1; -2]$ – lok. nim.; b) $[1; 1]$ – lok. min.]

NP Nalezněte vázané extrémy dané funkce při daných podmínkách.

a) $z = x + y$; podm. $xy = 1$
b) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; podm. $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

[a) $[1; 1]$ – lok. max., $[-1; -1]$ – lok. nim.; b) $[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ – lok. min., $[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ – lok. max.]

(19) Najděte absolutní extrémy funkce $z = x^2 - xy + y^2$, M je určena nerovnicí $|x| + |y| \leq 1$.

[$[0; 1]$, $[0; -1]$, $[1; 0]$, $[-1; 0]$ – abs. max., $[0; 0]$ – abs. min.]

NP Najděte absolutní extrémy daných funkcí.

a) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y;$ na obdélníku $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$
b) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y;$ na oblasti dané nerovnicí $x^2 + y^2 \leq 25$

[a) $[1; 2]$ – abs. max., $[1; 0]$ – abs. nim.; b) $[3; -4]$ – abs. min., $[-3; 4]$ – abs. max.]

References

[1] Novotný J.: *Matematika I – Základy lineární algebry*, CERM, FAST VUT Brno 2004.
[2] Dlouhý, O. – Tryhuk, V.: *Matematika I – Diferenciální počet funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 2004.
[3] Dlouhý, O. – Tryhuk, V.: *Matematika I – Diferenciální počet funkcí více reálných promennch*, CERM, FAST VUT Brno 2004.
[4] Tryhuk, V. – Dlouhý, O.: *Matematika I, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Modul GA01_M01, studijní opory pro studijní program Geodézie a kartografie s kombinovanou formou studia, Fakulta stavebni, Vysoké učení technické, Brno, 2004.
[5] Chrastinová, V.: *Matematika, Vektorvá algebra a analytická geometrie*, Modul 3, studijní opory pro studijní programy s kombinovanou formou studia, Fakulta stavebni, Vysoké učení technické, Brno, 2004.
[6] Daněček, J. – Dlouhý, O.: *Integrální počet I*, CERM, FAST VUT Brno 2003.
[7] Daněček, J. – Dlouhý, O. – Přibyl, O.: *Matematika I, Modul 7, Neurčitý integrál*, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2007.
[8] Daněček, J. – Dlouhý, O. – Přibyl, O.: *Matematika I, Modul 8, Určitý integrál*, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2007.
[9] Tryhuk, V.: *Matematika I1 – Úvod do matematické logiky a teorie množin*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
[10] Tryhuk, V.: *Matematika I2 – Reálná funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
[11] Veverka, J. – Slatinský E.: *Matematika I3 – Diferenciální pocet funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[12] Novotný J.: *Matematika I4 – Lineární algebra*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[13] Horňáková, D.: *Matematika I5 – Vektorová algebra*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[14] Horňáková, D.: *Matematika I6 – Analytická geometrie*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[15] Voráček, J.: *Matematika I7 – Neurčitý integrál*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[16] Voráček, J.: *Matematika II1 – Určitý integrál a jeho užití*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[17] Hřebíčková, J. – Slaběňáková, J. – Šafářová, H.: *Sbírka příkladů z matematiky II, Modul BA01-M11, Neurčitý a určitý integrál, diferenciální počet funkcí více proměnných, diferenciální rovnice*, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2008.
[18] Daněček, J. – Dlouhý, O. – Koutková, H. – Prudilová, K. – Sekaninová, J. – Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematiky I.*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
[19] Čermáková, H. – Hřebíčková, J. – Slaběňáková, J. – Šafářová, H.: *Sbírka příkladů z matematiky II.*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
[20] Prudilová, K. – Sekaninová, J. – Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematiky III.*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
[21] Hřebíčková, J. – Ráček, J. – Slaběňáková, J.: *Diferenciální počet v Maple 7*, FAST VUT Brno, 2001, http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/matematika/diferencialni_pocet/.
[22] Hřebíčková, J. – Ráček, J. – Slaběňáková, J.: *Integrální počet v Maple 7*, FAST VUT Brno, 2001, http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/matematika/integralni_pocet/.
[23] Veverka, J.: *Diferenciální počet II*, Fakulta stavební, Brno 1982.
[24] Eliaš, J. – Horvát, J. – Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1. časť*, SVTL, Bratislava 1965.
[25] Černá, B.: *Cvičení z lineární algebry*, MZLU v Brně, Brno 1998.
[26] Jelínek, Z. – Samotná O.: *Matematika – Integrální počet*, Skriptum VŠ zemědělské v Brně, SPN, Praha 1985.
[27] Jirásek, F. – Kriegelstein, E. – Tichý, Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky I*, SNTL/ALFA, Praha 1987.
[28] Karásek, J. – Maroš, B.: *Integrální počet, Matematika – Metodické pokyny pro cvičení*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
[29] Kříž, J. – Křížová, H.: *Diferenciální počet, metodické pokyny*, Fakulta strojní VUT, Brno 1978.
[30] Vosmanská, G.: *Matematika*, MZLU v Brně, Brno 1997.
[31] Online verze textů: *Riešené úlohy z matematiky 1*, Katedra Matematiky a Deskriptivnej geometrie, Stavebna fakulta, STU, Bratislava, http://www-kmadg.svf.stuba.sk/skripta/skripta.pdf.
[32] Online verze textů: *Riešené úlohy z matematiky 2*, Katedra Matematiky a Deskriptivnej geometrie, Stavebna fakulta, STU, Bratislava, http://www-kmadg.svf.stuba.sk/skripta2/skripta2.pdf.

Mgr. et Mgr. Jan Šafařík, Ph.D.
Typeset by LaTeX