

ÚSTAV MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

GA04 – Matematika II

Cvičení, zimní semestr

DOMÁCÍ ÚLOHY

Jan Šafařík



(1) Integrace užitím základních vzorců.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \int \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx & \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C \right] \\
 \text{b)} \int \left(\frac{14}{3}\sqrt{x^3} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{4}{3x^2} \right) dx & \left[\frac{28}{15}\sqrt{x^5} + \frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{3x} + C \right] \\
 \text{c)} \int (10^x - 2^x + 5^{2x}) dx & \left[\frac{10^x}{\ln 10} - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + C \right] \\
 \text{d)} \int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3} dx & \left[x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C \right] \\
 \text{e)} \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx & \left[-\frac{1}{x} + x - 2\ln|x| + C \right] \\
 \text{f)} \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx & \left[x - \operatorname{arctg} x + C \right] \\
 \text{g)} \int \frac{5\sin^2 x + 3\cos^2 x}{2\sin^2 x \cos^2 x} dx & \left[\frac{5}{2}\operatorname{tg} x - \frac{3}{2}\operatorname{cotg} x + C \right]
 \end{array}$$

(NP) Integrace užitím základních vzorců.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \int (3x^2 + 2x - 1) dx & \left[x^3 + x^2 - x + C \right] \\
 \text{b)} \int x^2(x^2 + 1) dx & \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + C \right] \\
 \text{c)} \int \frac{x^3 + 3x - 1}{x} dx & \left[\frac{x^3}{3} + 3x - \ln|x| + C \right] \\
 \text{d)} \int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}} dx & \left[\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C \right] \\
 \text{e)} \int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{x} dx & \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 6x + 24\sqrt{x} + 8\ln|x| + C \right]
 \end{array}$$

(2) Integrace substituční metodou.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \int (4x - 3)^4 dx & \left[\frac{1}{20}(4x - 3)^5 + C \right] \\
 \text{b)} \int \frac{1}{(2x - 7)^5} dx & \left[-\frac{1}{8} \frac{1}{(2x - 7)^4} + C \right] \\
 \text{c)} \int \frac{5}{\sqrt{2 - 49x^2}} dx & \left[\frac{5}{7} \operatorname{arcsin} \frac{7x}{\sqrt{2}} + C \right] \\
 \text{d)} \int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx & \left[\ln|\sin x + 1| + C \right] \\
 \text{e)} \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx & \left[\ln|e^x + 1| + C \right] \\
 \text{f)} \int \sin x \cos^3 x dx & \left[-\frac{1}{4} \cos^4 x + C \right] \\
 \text{g)} \int e^{\sin x} \cos x dx & \left[e^{\sin x} + C \right]
 \end{array}$$

(NP) Integrace substituční metodou.

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } \int \frac{e^x \sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1 + e^{2x}} dx & \left[\frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{arctg}^3 e^x} + C \right] \\
\text{b) } \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} & \left[\arccos \frac{1}{x} + C \right] \\
\text{c) } \int \sin^6 x \cos x dx & \left[\frac{1}{7} \sin^7 x + C \right] \\
\text{d) } \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx & \left[-e^{\frac{1}{x}} + C \right] \\
\text{e) } \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx & \left[\sin(\ln x) + C \right]
\end{array}$$

(3) Integrace metodou per partes.

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } \int x e^x dx & \left[x e^x - e^x + C \right] \\
\text{b) } \int x \sin 2x dx & \left[-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \right] \\
\text{c) } \int x^3 e^{x^2} dx & \left[\frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C \right] \\
\text{d) } \int \ln x dx & \left[x \ln x - x + C \right] \\
\text{e) } \int \ln^3 x \cdot x dx & \left[\frac{x^2}{2} (\ln^3 x - \frac{3}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \ln x - \frac{3}{4}) + C \right] \\
\text{f) } \int x \ln(x + 1) dx & \left[\frac{1}{2} \ln(x + 1)(x^2 - 1) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + C \right]
\end{array}$$

(NP) Integrace metodou per partes.

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx & \left[-\frac{x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \cotg x + C \right] \\
\text{b) } \int x \sinh x dx & \left[x \cosh x - \sinh x + C \right] \\
\text{c) } \int 5x e^{-4x} dx & \left[-\frac{5}{4} x e^{-4x} - \frac{5}{16} e^{-4x} + C \right] \\
\text{d) } \int e^x \cos 2x dx & \left[\frac{e^x}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) + C \right] \\
\text{e) } \int (x^2 - 2x + 5) e^{-4x} dx & \left[-e^{-x} (x^2 + 5) + C \right]
\end{array}$$

(4) Integrace racionální lomené funkce.

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } \int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 5} dx & \left[\frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) - \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{2} + C \right] \\
\text{b) } \int \frac{x}{x^2 - 3x + 3} dx & \left[\frac{1}{2} \ln \left| \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{\sqrt{3}} + C \right] \\
\text{c) } \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x - 1)(x^2 - x - 12)} dx & \left[\ln \left| \frac{(x - 1)^4 (x - 4)^5}{(x + 3)^7} \right| + C \right] \\
\text{d) } \int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx & \left[-\ln |e^x| + 2 \ln |e^x - 1| + C \right]
\end{array}$$

$$e) \int \frac{3x^3 - 5x^2 + 8x}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 1)} dx \quad \left[-\frac{3}{2} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln |(x-1)(x+1)^2| + C \right]$$

(NP) Integrace racionální lomené funkce.

$$a) \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx \quad \left[\ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right| + C \right]$$

$$b) \int \frac{dx}{x^3 + 1} dx \quad \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \right]$$

$$c) \int \frac{(x-1)^2}{x^2 + 3x + 4} dx \quad \left[x - \frac{5}{2} \ln(x^2 + 3x + 4) + \frac{9}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C \right]$$

(5) Integrace goniometrických funkcí.

$$a) \int \sin x \cos x dx \quad \left[\frac{1}{2} \sin^2 x + C \right]$$

$$b) \int \operatorname{tg} x dx \quad \left[-\ln |\cos x| + C \right]$$

$$c) \int \frac{1 - 2 \sin x}{\cos^2 x} dx \quad \left[\frac{\sin x - 2}{\cos x} + C \right]$$

$$d) \int \cos^3 x dx \quad \left[\frac{1}{3} \sin x \cos^2 x + \frac{2}{3} \sin x + C \right]$$

$$e) \int \frac{1}{\cos^3 x} dx \quad \left[-\frac{1}{3 \sin^3 x} + C \right]$$

$$f) \int \frac{1}{\cos x} dx \quad \left[-\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C \right]$$

(NP) Integrace goniometrických funkcí.

$$a) \int \sin^3 x \cos x dx \quad \left[\frac{1}{4} \sin^4 x + C \right]$$

$$b) \int \cos^5 2x \sin 2x dx \quad \left[-\frac{\cos^6 x}{12} + C \right]$$

$$c) \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad \left[-\ln |\sin x + \cos x| + C \right]$$

(6) Integrace iracionálních funkcí.

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{x} + 1} dx \quad \left[2(\sqrt{x} - \ln |\sqrt{x} + 1|) + C \right]$$

$$b) \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x-1}(x+1)(x-1)} dx \quad \left[-\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C \right]$$

$$c) \int \frac{\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} dx \quad \left[\frac{12}{5} \sqrt[12]{x^5} - 21 \sqrt[12]{x^4} + 4 \sqrt[12]{x^3} + 30 \sqrt[12]{x^2} + \right. \\ \left. 12 \sqrt[12]{x} + 24 \ln |\sqrt[12]{x} + 1| + 36 \ln |\sqrt[12]{x} - 1| + C \right]$$

$$d) \int \frac{x}{x + \sqrt{x}} dx \quad \left[x - 2\sqrt{x} + 2 \ln |\sqrt{x} + 1| + C \right]$$

(NP) Integrace iracionálních funkcí.

$$a) \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}} dx \quad \left[3 \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \sqrt[3]{x} + \ln |1 + \sqrt[3]{x}| \right) + C \right]$$

$$b) \int \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} dx \quad \left[-6\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1} \right| + C \right]$$

$$c) \int \frac{1 + \sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x+1} dx \quad \left[-2\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 2\ln \left| \sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1 \right| + C \right]$$

(7) Výpočet určitého integrálu – úpravou.

$$a) \int_3^5 \frac{1}{x} dx \quad \left[\ln \frac{5}{3} \right]$$

$$b) \int_0^3 |1 - 3x| dx \quad \left[\frac{65}{6} \right]$$

$$c) \int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} dx \quad [0]$$

(8) Výpočet určitého integrálu – metoda per partes.

$$a) \int_0^\pi x \sin x dx \quad [\pi]$$

$$b) \int_{-1}^1 \ln(x+2) dx \quad [3 \ln 3 - 2]$$

$$c) \int_{-1}^1 \arccos x dx \quad [\pi]$$

$$d) \int_0^1 e^{3x} x dx \quad \left[\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9} \right]$$

(9) Výpočet určitého integrálu – substituční metoda.

$$a) \int_1^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} dx \quad \left[2 \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right]$$

$$b) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x \cos x} dx \quad \left[\frac{1}{3} \right]$$

$$c) \int_1^5 \frac{\ln x}{x} dx \quad \left[\frac{1}{2} \ln^2 5 \right]$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx \quad \left[\frac{1}{3} \right]$$

(NP) Výpočet určitého integrálu.

$$a) \int_{-7}^5 |x+1| dx \quad [36]$$

$$b) \int_{-1}^1 \cosh x dx \quad \left[e - \frac{1}{e} \right]$$

$$c) \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3} dx \quad \left[\frac{2}{9} \right]$$

$$d) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \quad [\sqrt{2} - 1]$$

- (10) Vypočtete obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného křivkami $x^2 + y^2 = 1$, $y = 1 - x$, $x \geq 0$, $y > 0$.

$$\left[\frac{\pi - 2}{4} \right]$$

- (11) Vypočtete délku oblouku rovinné křivky $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$.

$$\left[2 + \frac{1}{2}\ln 3 \right]$$

- (12) Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací plochy P kolem osy x . $P : y = -x^2 + 1$, $y = -2x^2 + 2$.

$$\left[\frac{16}{5}\pi \right]$$

- NP Vypočtete povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy x . $P : x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$.

$$\left[\frac{6\pi a^2}{2} \right]$$

- NP Najděte těžiště homogenní hmotné oblasti omezené křivkami $y = x^2$, $y = \frac{2}{1 + x^2}$.

$$\left[T \left(0; \frac{24 + 15\pi}{30\pi - 20} \right) \right]$$

- NP Stanovte definiční obor dané funkce a načrtněte jej.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2} & \text{b) } z = 2\sqrt{y - x^2} + 5\sqrt{x - y^2} \\ \text{c) } z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} & \text{d) } z = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin 2xy \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{[a) } Dz = \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}; \text{ b) } Dz = \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : \\ y \geq x^2 \wedge x \geq y^2\}; \text{ c) } Dz = \mathbb{E}_2 - \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : y = x \wedge y = -x\}; \text{ d) } \\ Dz = \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 2\} \cap (\{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq -\frac{1}{2x} \wedge x > 0\} \cup \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : \\ y \leq -\frac{1}{2x} \wedge x < 0\}) \cup \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : y \leq \frac{1}{2x} \wedge x > 0\} \cup \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq \frac{1}{2x} \wedge x < 0\} \end{array}$$

- (13) Vypočtete parciální derivace prvního řádu daných funkcí.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z = \frac{3xy}{x - y} & \text{b) } z = (\sin x)^{\cos y} \\ \text{c) } z = xy e^{\sin \pi xy} & \text{d) } y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{[a) } z'_x = -\frac{3y^2}{(x - y)^2}, z'_y = \frac{3x^2}{(x - y)^2}; \\ \text{b) } z'_x = \cos x \cos y (\sin x)^{\cos y - 1}, z'_y = -\sin y \ln \sin x (\sin x)^{\cos y}; \\ \text{c) } z'_x = e^{\sin \pi xy} y (1 + \pi xy \cos \pi xy), z'_y = e^{\sin \pi xy} x (1 + \pi xy \cos \pi xy); \\ \text{d) } z'_x = \frac{-2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{-2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}$$

NP Vypočtete parciální derivace prvního řádu daných funkcí.

$$\text{a) } z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \frac{x+y}{xy} \quad \text{b) } z = (2x+y)^{2x+y}$$

$$\begin{aligned} \text{[a) } z'_x &= -\frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}, z'_y = -\frac{1}{y^2} \sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}; \\ \text{b) } z'_x &= 2[1 + \ln(2x+y)]z, z'_y = [1 + \ln(2x+y)]z \end{aligned}$$

(14) Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu daných funkcí.

$$\text{a) } z = \frac{\cos x^2}{y} \quad \text{b) } z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\begin{aligned} \text{[a) } z''_{xx} &= -\frac{2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y}, z''_{yy} = \frac{2 \cos x^2}{y^3}, z''_{xy} = \frac{2x \sin x^2}{y^2}; \text{ b) } z''_{xx} = \frac{4y}{9x^{\frac{7}{3}}}, \\ z''_{yy} &= \frac{-x}{4\sqrt{y^3}}, z''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

NP Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu daných funkcí.

$$\text{a) } z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{b) } z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$\begin{aligned} \text{[a) } z''_{xx} &= \frac{-3xy^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, z''_{xy} = \frac{y(2x^2 - y^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, z''_{yy} = \frac{-x(x^2 + 2y^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}; \text{ b) } z''_{xx} = \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, z''_{xy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, z''_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

(15) Vypočtete všechny požadované derivace daných funkcí.

$$\text{a) } z = e^x \ln y + \sin y \ln x, z'''_{xyy} = ?, z'''_{yyy} = ? \quad \text{b) } z = x^2y + e^{xy^2}, z'''_{xxy} = ?$$

$$\text{[a) } z'''_{xyy} = -\frac{e^x}{y^2} - \frac{\sin y}{x}, z'''_{yyy} = \frac{2e^x}{y^3} - \cos y \ln x; \text{ b) } z'''_{xxy} = 2 + e^{xy^2} y^3 (4 + 2xy^2) \text{]}$$

NP Určete d^2z v bodě A funkce $z = f(x, y)$.

$$\text{a) } z = \sin x \sin y, A = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{b) } z = y \ln x, A = (1, 1)$$

$$\text{[a) } -\frac{1}{2}dx^2 - dx dy - \frac{1}{2}dy^2; \text{ b) } -dx^2 + 2dx dy \text{]}$$

NP Určete d^2z v bodě A funkce $z = f(x, y)$.

$$\text{a) } z = e^{xy}, A = [1, 2]$$

$$\text{[a) } 4e^2 dx^2 + 6e^2 dx dy + e^2 dy^2 \text{]}$$

Taylorova věta pro funkci $f(x)$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$:

$$f(X) = f(X_o) + \frac{1}{1!}df(X_o) + \frac{1}{2!}d^2f(X_o) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(X_o) + R_{n+1}(X),$$

kde zbytek $R_{n+1}(X) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_1 + \delta h_1, \dots, x_n + \delta h_n)$, $\delta \in (0, 1)$.

(16) Napište Taylorův polynom stupně n pro funkci $y = f(x, y)$ v bodě A .

a) $z = e^x \sin y$, $A = [0, 0]$, $n = 3$

b) $z = \sin(xy)$, $A = [0, \frac{\pi}{2}]$, $n = 2$

[a) $y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3$; b) $\frac{\pi}{2}x + x(y - \frac{\pi}{2})$]

NP Napište Taylorův polynom stupně n pro funkci $y = f(x, y)$ v bodě A .

a) $z = \ln(1-x)\ln(1-y)$, $A = [0, 0]$, $n = 3$

[a) $xy + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2$]

Pravidla pro počítání složených funkcí:

- $z = f(x, y)$, $x = x(t)$ a $y = y(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{dy}{dt}$$

- $w = f(x, y, z)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ a $z = z(u, v)$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial v},$$

- Obecně: $w = f(x_1, \dots, x_m)$, $x_k = x_k(t_1, \dots, t_n)$, pro $k = 1, \dots, m$

$$\frac{\partial w}{\partial t_i} = \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \left(\frac{\partial w}{\partial x_m}\right) \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_i},$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$.

(17) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu složených funkcí.

a) $z = u + v^2$, $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x + y)$

b) $z = u^2v - v^2u$, $u = x \cos y$, $v = x \sin y$

[a) $z'_x = 2x + \frac{2}{x+y} \ln(x+y)$, $z'_y = \cos y + \frac{2}{x+y} \ln(x+y)$; b) $z'_x = 3x^2 \sin y \cos y (\cos y - \sin y)$, $z'_y = x^3 (\sin y + \cos y) (1 - 3 \sin y \cos y)$]

NP Vypočtete parciální derivace prvního řádu složených funkcí.

$$\text{a) } z = u^v, u = \ln(x + y), v = e^{\frac{x}{y}}$$

$$[\text{a) } z'_x = vu^{v-1} \frac{1}{x-y} + u^v \ln v \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}, z'_y = \frac{vu^{v-1}}{y-x} + u^v \ln u \frac{-e^{\frac{x}{y}}}{y^2}]$$

(18) Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně danou rovnicí.

$$\text{a) } \cos(ax + by - cz) = k(ax + by - cz)$$

$$\text{b) } x + y + z = e^z$$

$$[\text{a) } z'_x = \frac{a}{c}, z'_y = \frac{b}{c}; \text{ b) } z'_x = \frac{1}{(x + y + z - 1)} = z'_y]$$

NP Vypočtete první parciální derivace v bodě A funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně danou rovnicí.

$$\text{a) } e^z + x^2y + z + 5 = 0, A = [1, -6, 0]$$

$$\text{b) } \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = 0, A = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \right]$$

$$[\text{a) } z'_x(A) = 6, z'_y(A) = -\frac{1}{2}, \text{ b) } z'_x(A) = -1, z'_y(A) = 0]$$

Tečná rovina a normála plochy:

Tečná rovina τ a normála n plochy $z = f(x, y)$ v bodě $B_0 = [x_0; y_0; z_0]$ jsou dány rovnicemi tvaru:

$$\tau : (x - x_0) \cdot f_x(B_0) + (y - y_0) \cdot f_y(B_0) - (z - z_0) = 0$$

$$n : \frac{x - x_0}{f_x(B_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(B_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Je-li plocha dána implicitně $F(x; y; z) = 0$, pak

$$\tau : (x - x_0) \cdot F_x(B_0) + (y - y_0) \cdot F_y(B_0) + (z - z_0) \cdot F_z(B_0) = 0$$

$$n : \frac{x - x_0}{F_x(B_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(B_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(B_0)}$$

Pro normálový vektor \vec{n} tečné roviny platí $\vec{n} = (F_x(B_0); F_y(B_0); F_z(B_0))$. Normálu si můžeme vyjádřit parametricky ve tvaru:

$$x = x_0 + tF_x(B_0), y = y_0 + tF_y(B_0), z = z_0 + tF_z(B_0); t \in \mathbb{R}.$$

(19) Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě A plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně danou rovnicí.

$$\text{a) } x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0, A = [2, -6, ?]$$

$$\text{b) } (z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5, A = [1, 1, 2]$$

$$[\text{a) } \tau_1 : 2x - 6y + 3z - 49 = 0, n : x = 2 + 4t, y = -6 - 12t, z = 3 + 6t, \\ \tau_2 : 2x - 6y - 3z - 49 = 0, n : x = 2 + 4t, y = -6 - 12t, z = -3 - 6t; \text{ b) } \\ \tau : 2x + y + 11z - 25 = 0, n : x = 1 + 2t, y = 1 + t, z = 2 + 11t]$$

NP Určete tečnou rovinu a normálu v bodě T plochy $z = f(x, y)$.
 $z = xy^2 - x^2y$, $T = [2; 1; ?]$.

$$[\tau : 3x + z - 4 = 0; n : x = 2 + 3t, y = 1, z = -2 + t]$$

NP Určete tečnou rovinu a normálu v bodě T plochy $z = f(x, y)$.

$$z = \frac{y^2}{x^2}, T = [-1; 2; ?].$$

$$[\tau : 8x + 4y - z44 = 0; n : x = -1 + 8t, y = 2 + 4t, z = 4 - t]$$

NP Určete derivaci ve směru \vec{s} v bodě A a gradient v bodě A funkce $z = f(x, y)$.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy, A = [3; 4], \vec{s} = (3; 4).$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\frac{19}{5}, \text{grad } z = -\frac{17}{5}\vec{i} - \frac{11}{5}\vec{j} \right]$$

NP Určete derivaci funkce $z = \ln(x^2 + y^2)$ v bodě $A = [1; 2]$.

a) ve směru tečného vektoru v bodě A ke křivce $y = 2\sqrt{x}$,

b) ve směru, v němž je derivace maximální.

$$[\text{a) } \frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\frac{3}{5}\sqrt{2}; \text{ b) } \frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\frac{2}{5}\sqrt{2}]$$

(20) Nalezněte lokální extrémů daných funkcí.

$$\text{a) } z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$$

$$\text{b) } z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

$$\text{c) } z = \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$$

[a) $[4; 4]$ – lok. max.; b) $[-1; 2]$ – není, $[0; 0]$ – lok. min., $[-1; -2]$ a $\left[-\frac{5}{3}; 0\right]$ – lok. max.; c) $[3; 6]$ – lok. max.]

NP Nalezněte lokální extrémů daných funkcí.

$$\text{a) } z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

$$\text{b) } z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$$

[a) $[5; 2]$ – lok. min.; b) $[4; 4]$ – lok. max.]

NP Nalezněte vázané extrémů dané funkce při daných podmínkách.

$$\text{a) } z = x + 2y; \text{ podm. } x^2 + y^2 = 5$$

$$\text{b) } z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \text{ podm. } x + y = 2$$

[a) $[1; 2]$ – lok. max., $[-1; -2]$ – lok. min.; b) $[1; 1]$ – lok. min.]

NP Nalezněte vázané extrémů dané funkce při daných podmínkách.

$$\text{a) } z = x + y; \text{ podm. } xy = 1$$

$$\text{b) } z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \text{ podm. } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$$

[a) $[1; 1]$ – lok. max., $[-1; -1]$ – lok. min.; b) $[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ – lok. min., $[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ – lok. max.]

NP Najděte absolutní extrémů daných funkcí.

- a) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$; na obdélníku $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$
- b) $z = x^2 - xy + y^2$; M je určena nerovnicí $|x| + |y| \leq 1$
- c) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$; na oblasti dané nerovnicí $x^2 + y^2 \leq 25$

[a) $[1; 2]$ – abs. max., $[1; 0]$ – abs. min.; b) $[0; 1]$, $[0; -1]$, $[1; 0]$, $[-1; 0]$ – abs. max., $[0; 0]$ – abs. min.; c) $[3; -4]$ – abs. min., $[-3; 4]$ – abs. max.]

REFERENCES

- [1] Novotný J.: *Matematika I – Základy lineární algebry*, CERM, FAST VUT Brno 2004.
- [2] Dlouhý, O. – Tryhuk, V.: *Matematika I – Diferenciální počet funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 2004.
- [3] Dlouhý, O. – Tryhuk, V.: *Matematika I – Diferenciální počet funkcí více reálných promenných*, CERM, FAST VUT Brno 2004.
- [4] Tryhuk, V. – Dlouhý, O.: *Matematika I, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Modul GA01_M01, studijní opory pro studijní program Geodézie a kartografie s kombinovanou formou studia, Fakulta stavební, Vysoké učení technické, Brno, 2004.
- [5] Chrastinová, V.: *Matematika, Vektorová algebra a analytická geometrie*, Modul 3, studijní opory pro studijní programy s kombinovanou formou studia, Fakulta stavební, Vysoké učení technické, Brno, 2004.
- [6] Daněček, J. – Dlouhý, O.: *Integrální počet I*, CERM, FAST VUT Brno 2003.
- [7] Daněček, J. – Dlouhý, O. – Příbyl, O.: *Matematika I, Modul 7, Neurčitý integrál*, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2007.
- [8] Daněček, J. – Dlouhý, O. – Příbyl, O.: *Matematika I, Modul 8, Určitý integrál*, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2007.
- [9] Tryhuk, V.: *Matematika I1 – Úvod do matematické logiky a teorie množin*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
- [10] Tryhuk, V.: *Matematika I2 – Reálná funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
- [11] Veverka, J. – Slatinský E.: *Matematika I3 – Diferenciální počet funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [12] Novotný J.: *Matematika I4 – Lineární algebra*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [13] Horňáková, D.: *Matematika I5 – Vektorová algebra*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [14] Horňáková, D.: *Matematika I6 – Analytická geometrie*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [15] Voráček, J.: *Matematika I7 – Neurčitý integrál*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [16] Voráček, J.: *Matematika III – Určitý integrál a jeho užití*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [17] Hřebíčková, J. – Slaběňáková, J. – Šafařová, H.: *Sbírka příkladů z matematiky II, Modul BA01-M11, Neurčitý a určitý integrál, diferenciální počet funkcí více proměnných, diferenciální rovnice*, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2008.
- [18] Daněček, J. – Dlouhý, O. – Koutková, H. – Prudilová, K. – Sekaninová, J. – Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematiky I*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
- [19] Čermáková, H. – Hřebíčková, J. – Slaběňáková, J. – Šafařová, H.: *Sbírka příkladů z matematiky II*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
- [20] Prudilová, K. – Sekaninová, J. – Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematiky III*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [21] Hřebíčková, J. – Ráček, J. – Slaběňáková, J.: *Diferenciální počet v Maple 7*, FAST VUT Brno, 2001, http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/matematika/diferencialni_pocet/.
- [22] Hřebíčková, J. – Ráček, J. – Slaběňáková, J.: *Integrální počet v Maple 7*, FAST VUT Brno, 2001, http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/matematika/integralni_pocet/.
- [23] Veverka, J.: *Diferenciální počet II*, Fakulta stavební, Brno 1982.
- [24] Eliaš, J. – Horvát, J. – Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1. časť*, SVTL, Bratislava 1965.
- [25] Černá, B.: *Cvičení z lineární algebry*, MZLU v Brně, Brno 1998.
- [26] Jelínek, Z. – Samotná O.: *Matematika – Integrální počet*, Skriptum VŠ zemědělské v Brně, SPN, Praha 1985.
- [27] Jirásek, F. – Krieglstein, E. – Tichý, Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky I*, SNTL/ALFA, Praha 1987.
- [28] Karásek, J. – Maroš, B.: *Integrální počet, Matematika – Metodické pokyny pro cvičení*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
- [29] Kříž, J. – Křížová, H.: *Diferenciální počet, metodické pokyny*, Fakulta strojní VUT, Brno 1978.
- [30] Vosmanská, G.: *Matematika*, MZLU v Brně, Brno 1997.
- [31] Online verze textů: *Riešené úlohy z matematiky 1*, Katedra Matematiky a Deskriptívnej geometrie, Stavebna fakulta, STU, Bratislava, <http://www-kmadg.svf.stuba.sk/skripta/skripta.pdf>.
- [32] Online verze textů: *Riešené úlohy z matematiky 2*, Katedra Matematiky a Deskriptívnej geometrie, Stavebna fakulta, STU, Bratislava, <http://www-kmadg.svf.stuba.sk/skripta2/skripta2.pdf>.