

ÚSTAV MATEMATIKY A DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

GA04 – Matematika II

Cvičení, zimní semestr

DOMÁCÍ ÚLOHY

Jan Šafařík

(1) Integrace užitím základních vzorců.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \int \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx & \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C \right] \\
 \text{b) } \int \left(\frac{14}{3}\sqrt{x^3} - \frac{11}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{4}{3x^2} \right) dx & \left[\frac{28}{15}\sqrt{x^5} + \frac{33}{2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{3x} + C \right] \\
 \text{c) } \int (10^x - 2^x + 5^{2x}) dx & \left[\frac{10^x}{\ln 10} - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + C \right] \\
 \text{d) } \int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3} dx & \left[x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C \right] \\
 \text{e) } \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx & \left[-\frac{1}{x} + x - 2\ln|x| + C \right] \\
 \text{f) } \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx & \left[x - \operatorname{arctg} x + C \right] \\
 \text{g) } \int \frac{5\sin^2 x + 3\cos^2 x}{2\sin^2 x \cos^2 x} dx & \left[\frac{5}{2}\operatorname{tg} x - \frac{3}{2}\operatorname{cotg} x + C \right]
 \end{array}$$

(NP) Integrace užitím základních vzorců.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \int (3x^2 + 2x - 1) dx & \left[x^3 + x^2 - x + C \right] \\
 \text{b) } \int x^2(x^2 + 1) dx & \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + C \right] \\
 \text{c) } \int \frac{x^3 + 3x - 1}{x} dx & \left[\frac{x^3}{3} + 3x - \ln|x| + C \right] \\
 \text{d) } \int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}} dx & \left[\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C \right] \\
 \text{e) } \int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{x} dx & \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 6x + 24\sqrt{x} + 8\ln|x| + C \right]
 \end{array}$$

(2) Integrace substituční metodou.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \int (4x - 3)^4 dx & \left[\frac{1}{20}(4x - 3)^5 + C \right] \\
 \text{b) } \int \frac{1}{(2x - 7)^5} dx & \left[-\frac{1}{8} \frac{1}{(2x - 7)^4} + C \right] \\
 \text{c) } \int \frac{5}{\sqrt{2 - 49x^2}} dx & \left[\frac{5}{7} \operatorname{arcsin} \frac{7x}{\sqrt{2}} + C \right] \\
 \text{d) } \int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx & \left[\ln|\sin x + 1| + C \right] \\
 \text{e) } \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx & \left[\ln|e^x + 1| + C \right]
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int \sin x \cos^3 x \, dx & \quad \left[-\frac{1}{4} \cos^4 x + C \right] \\ \text{g) } \int e^{\sin x} \cos x \, dx & \quad \left[e^{\sin x} + C \right] \end{aligned}$$

(NP) Integrace substituční metodou.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{e^x \sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1 + e^{2x}} \, dx & \quad \left[\frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{arctg}^3 e^x} + C \right] \\ \text{b) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} & \quad \left[\arccos \frac{1}{x} + C \right] \\ \text{c) } \int \sin^6 x \cos x \, dx & \quad \left[\frac{1}{7} \sin^7 x + C \right] \\ \text{d) } \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx & \quad \left[-e^{\frac{1}{x}} + C \right] \\ \text{e) } \int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx & \quad \left[\sin(\ln x) + C \right] \end{aligned}$$

(3) Integrace metodou per partes.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int x e^x \, dx & \quad \left[x e^x - e^x + C \right] \\ \text{b) } \int x \sin 2x \, dx & \quad \left[-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \right] \\ \text{c) } \int x^3 e^{x^2} \, dx & \quad \left[\frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C \right] \\ \text{d) } \int \ln x \, dx & \quad \left[x \ln x - x + C \right] \\ \text{e) } \int \ln^3 x \cdot x \, dx & \quad \left[\frac{x^2}{2} (\ln^3 x - \frac{3}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \ln x - \frac{3}{4}) + C \right] \\ \text{f) } \int x \ln(x + 1) \, dx & \quad \left[\frac{1}{2} \ln(x + 1)(x^2 - 1) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + C \right] \end{aligned}$$

(NP) Integrace metodou per partes.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx & \quad \left[-\frac{x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} x + C \right] \\ \text{b) } \int x \sinh x \, dx & \quad \left[x \cosh x - \sinh x + C \right] \\ \text{c) } \int 5x e^{-4x} \, dx & \quad \left[-\frac{5}{4} x e^{-4x} - \frac{5}{16} e^{-4x} + C \right] \\ \text{d) } \int e^x \cos 2x \, dx & \quad \left[\frac{e^x}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) + C \right] \end{aligned}$$

$$\text{e) } \int (x^2 - 2x + 5)e^{-4} dx \quad [-e^{-x}(x^2 + 5) + C]$$

(4) Integrace racionální lomené funkce.

$$\text{a) } \int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 5} dx \quad [\frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) - \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{2} + C]$$

$$\text{b) } \int \frac{x}{x^2 - 3x + 3} dx \quad [\frac{1}{2} \ln \left| \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{\sqrt{3}} + C]$$

$$\text{c) } \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x - 1)(x^2 - x - 12)} dx \quad [\ln \left| \frac{(x - 1)^4(x - 4)^5}{(x + 3)^7} \right| + C]$$

$$\text{d) } \int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx \quad [-\ln |e^x| + 2 \ln |e^x - 1| + C]$$

$$\text{e) } \int \frac{3x^3 - 5x^2 + 8x}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 1)} dx \quad [-\frac{3}{2} \frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{2}{x - 1} + \ln |(x - 1)(x + 1)^2| + C]$$

(NP) Integrace racionální lomené funkce.

$$\text{a) } \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x - 1)(x + 3)(x - 4)} dx \quad [\ln \left| \frac{(x - 1)^4(x - 4)^5}{(x + 3)^7} \right| + C]$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{x^3 + 1} dx \quad [\frac{1}{6} \ln \frac{(x + 1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C]$$

$$\text{c) } \int \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 3x + 4} dx \quad [x - \frac{5}{2} \ln(x^2 + 3x + 4) + \frac{9}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 3}{\sqrt{7}} + C]$$

(5) Integrace goniometrických funkcí.

$$\text{a) } \int \sin x \cos x dx \quad [\frac{1}{2} \sin^2 x + C]$$

$$\text{b) } \int \operatorname{tg} x dx \quad [-\ln |\cos x| + C]$$

$$\text{c) } \int \frac{1 - 2 \sin x}{\cos^2 x} dx \quad [\frac{\sin x - 2}{\cos x} + C]$$

$$\text{d) } \int \cos^3 x dx \quad [\frac{1}{3} \sin x \cos^2 x + \frac{2}{3} \sin x + C]$$

$$\text{e) } \int \frac{1}{\cos^3 x} dx \quad [-\frac{1}{3 \sin^3 x} + C]$$

$$\text{f) } \int \frac{1}{\cos x} dx \quad [-\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C]$$

(NP) Integrace goniometrických funkcí.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \sin^3 x \cos x \, dx & \quad \left[\frac{1}{4} \sin^4 x + C \right] \\ \text{b) } \int \cos^5 2x \sin 2x \, dx & \quad \left[-\frac{\cos^6 x}{12} + C \right] \\ \text{c) } \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx & \quad \left[-\ln |\sin x + \cos x| + C \right] \end{aligned}$$

(6) Integrace iracionálních funkcí.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, dx & \quad \left[2(\sqrt{x} - \ln |\sqrt{x} + 1|) + C \right] \\ \text{b) } \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}(x+1)(x-1)} \, dx & \quad \left[-\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C \right] \\ \text{c) } \int \frac{\sqrt[4]{x^3 - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x}}}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} \, dx & \quad \left[\frac{12}{5} \sqrt[12]{x^5} - 21 \sqrt[12]{x^4} + 4 \sqrt[12]{x^3} + 30 \sqrt[12]{x^2} + \right. \\ & \quad \left. 12 \sqrt[12]{x} + 24 \ln |\sqrt[12]{x} + 1| + 36 \ln |\sqrt[12]{x} - 1| + C \right] \\ \text{d) } \int \frac{x}{x + \sqrt{x}} \, dx & \quad \left[x - 2\sqrt{x} + 2 \ln |\sqrt{x} + 1| + C \right] \end{aligned}$$

(NP) Integrace iracionálních funkcí.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}} \, dx & \quad \left[3 \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \sqrt[3]{x} + \ln |1 + \sqrt[3]{x}| \right) + C \right] \\ \text{b) } \int \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} \, dx & \quad \left[-6\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} + 1} \right| + C \right] \\ \text{c) } \int \frac{1 + \sqrt{\frac{x}{x+1}}}{x+1} \, dx & \quad \left[-2\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 2 \ln \left| \sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1 \right| + C \right] \end{aligned}$$

(7) Výpočet určitého integrálu – úpravou.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_3^5 \frac{1}{x} \, dx & \quad \left[\ln \frac{5}{3} \right] \\ \text{b) } \int_0^3 |1 - 3x| \, dx & \quad \left[\frac{65}{6} \right] \\ \text{c) } \int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} \, dx & \quad [0] \end{aligned}$$

(8) Výpočet určitého integrálu – metoda per partes.

$$\text{a) } \int_0^{\pi} x \sin x \, dx \quad [\pi]$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 \ln(x+2) \, dx \quad [3 \ln 3 - 2]$$

$$\text{c) } \int_{-1}^1 \arccos x \, dx \quad [\pi]$$

$$\text{d) } \int_0^1 e^{3x} x \, dx \quad [\frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{9}]$$

(9) Výpočet určitého integrálu – substituční metoda.

$$\text{a) } \int_1^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} \, dx \quad [2 \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3}]$$

$$\text{b) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x \cos x} \, dx \quad [\frac{1}{3}]$$

$$\text{c) } \int_1^5 \frac{\ln x}{x} \, dx \quad [\frac{1}{2} \ln^2 5]$$

$$\text{d) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx \quad [\frac{1}{3}]$$

(NP) Výpočet určitého integrálu.

$$\text{a) } \int_{-7}^5 |x+1| \, dx \quad [36]$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 \cosh x \, dx \quad [e - \frac{1}{e}]$$

$$\text{c) } \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3} \, dx \quad [\frac{2}{9}]$$

$$\text{d) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx \quad [\sqrt{2} - 1]$$

(10) Vypočítejte obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného křivkami $x^2 + y^2 = 1$, $y = 1 - x$, $x \geq 0$, $y > 0$.

$$[\frac{\pi - 2}{4}]$$

(11) Vypočtěte délku oblouku rovinné křivky $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $x \in \langle 1, 3 \rangle$.

$$\left[2 + \frac{1}{2} \ln 3 \right]$$

(12) Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy P kolem osy x . $P : y = -x^2 + 1$, $y = -2x^2 + 2$.

$$\left[\frac{16}{5} \pi \right]$$

NP Vypočtěte povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy x . $P : x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$.

$$\left[\frac{6\pi a^2}{2} \right]$$

NP Najděte těžiště homogenní hmotné oblasti omezené křivkami $y = x^2$, $y = \frac{2}{1+x^2}$.

$$\left[T \left(0; \frac{24 + 15\pi}{30\pi - 20} \right) \right]$$

NP Stanovte definiční obor dané funkce a načrtněte jej.

a) $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}$

b) $z = 2\sqrt{y - x^2} + 5\sqrt{x - y^2}$

c) $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

d) $z = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin 2xy$

[a) $Dz = \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$; b) $Dz = \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq x^2 \wedge x \geq y^2\}$; c) $Dz = \mathbb{E}_2 - \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : y = x \wedge y = -x\}$; d) $Dz = \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 2\} \cap (\{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq -\frac{1}{2x} \wedge x > 0\} \cup \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : y \leq -\frac{1}{2x} \wedge x < 0\}) \cup \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : y \leq \frac{1}{2x} \wedge x > 0\} \cup \{(x; y) \in \mathbb{E}_2 : y \geq \frac{1}{2x} \wedge x < 0\}$]

(13) Vypočtěte parciální derivace prvního řádu daných funkcí.

a) $z = \frac{3xy}{x - y}$

b) $z = (\sin x)^{\cos y}$

c) $z = xy e^{\sin \pi xy}$

d) $y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$

$$\begin{aligned}
 \text{[a) } & z'_x = -\frac{3y^2}{(x-y)^2}, z'_y = \frac{3x^2}{(x-y)^2}; \\
 \text{b) } & z'_x = \cos x \cos y (\sin x)^{\cos y - 1}, z'_y = -\sin y \ln \sin x (\sin x)^{\cos y}; \\
 \text{c) } & z'_x = e^{\sin \pi xy} y (1 + \pi xy \cos \pi xy), z'_y = e^{\sin \pi xy} x (1 + \pi xy \cos \pi xy); \\
 \text{d) } & z'_x = \frac{-2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{-2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}]
 \end{aligned}$$

NP Vypočtete parciální derivace prvního řádu daných funkcí.

$$\text{a) } z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \frac{x+y}{xy} \quad \text{b) } z = (2x+y)^{2x+y}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[a) } & z'_x = -\frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}, z'_y = -\frac{1}{y^2} \sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}; \\
 \text{b) } & z'_x = 2[1 + \ln(2x+y)]z, z'_y = [1 + \ln(2x+y)]z]
 \end{aligned}$$

(14) Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu daných funkcí.

$$\text{a) } z = \frac{\cos x^2}{y} \quad \text{b) } z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[a) } & z''_{xx} = -\frac{2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y}, z''_{yy} = \frac{2 \cos x^2}{y^3}, z''_{xy} = \frac{2x \sin x^2}{y^2}; \text{ b) } z''_{xx} = \frac{4y}{9x^{\frac{7}{3}}}, \\
 & z''_{yy} = \frac{-x}{4\sqrt{y^3}}, z''_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}]
 \end{aligned}$$

NP Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu daných funkcí.

$$\text{a) } z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{b) } z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{[a) } & z''_{xx} = \frac{-3xy^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, z''_{xy} = \frac{y(2x^2 - y^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, z''_{yy} = \frac{-x(x^2 + 2y^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}; \text{ b) } z''_{xx} = \\
 & \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, z''_{xy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, z''_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}]
 \end{aligned}$$

(15) Vypočtete všechny požadované derivace daných funkcí.

$$\text{a) } z = e^x \ln y + \sin y \ln x, x'''_{xyy} = ?, x'''_{yyy} = ? \quad \text{b) } z = x^2 y + e^{xy^2}, z'''_{xy} = ?$$

$$[\text{a) } z'''_{xyy} = -\frac{e^x}{y^2} - \frac{\sin y}{x}, z'''_{yyy} = \frac{2e^x}{y^3} - \cos y \ln x; \text{b) } z'''_{xxy} = 2 + e^{xy^2} y^3(4 + 2xy^2)]$$

NP Určete d^2z v bodě A funkce $z = f(x, y)$.

$$\text{a) } z = \sin x \sin y, A = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{b) } z = y \ln x, A = (1, 1)$$

$$[\text{a) } -\frac{1}{2}dx^2 - dx dy - \frac{1}{2}dy^2; \text{b) } -dx^2 + 2dx dy]$$

NP Určete d^2z v bodě A funkce $z = f(x, y)$.

$$\text{a) } z = e^{xy}, A = [1, 2]$$

$$[\text{a) } 4e^2 dx^2 + 6e^2 dx dy + e^2 dy^2]$$

Taylorova věta pro funkci $f(x)$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$:

$$f(X) = f(X_o) + \frac{1}{1!}df(X_o) + \frac{1}{2!}d^2f(X_o) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(X_o) + R_{n+1}(X),$$

kde zbytek $R_{n+1}(X) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_1 + \delta h_1, \dots, x_n + \delta h_n), \delta \in (0, 1)$.

(16) Napište Taylorův polynom stupně n pro funkci $y = f(x, y)$ v bodě A .

$$\text{a) } z = e^x \sin y, A = [0, 0], n = 3$$

$$\text{b) } z = \sin(xy), A = \left[0, \frac{\pi}{2} \right], n = 2$$

$$[\text{a) } y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3; \text{b) } \frac{\pi}{2}x + x(y - \frac{\pi}{2})]$$

NP Napište Taylorův polynom stupně n pro funkci $y = f(x, y)$ v bodě A .

$$\text{a) } z = \ln(1-x) \ln(1-y), A = [0, 0], n = 3$$

$$[\text{a) } xy + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2]$$

Pravidla pro počítání složených funkcí:

- $z = f(x, y), x = x(t)$ a $y = y(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \frac{dy}{dt}$$

- $w = f(x, y, z)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ a $z = z(u, v)$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial v},$$

- Obecně: $w = f(x_1, \dots, x_m)$, $x_k = x_k(t_1, \dots, t_n)$, pro $k = 1, \dots, m$

$$\frac{\partial w}{\partial t_i} = \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \left(\frac{\partial w}{\partial x_m} \right) \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_i},$$

kde $i = 1, 2, \dots, n$.

(17) Vypočtete parciální derivace prvního řádu složených funkcí.

a) $z = u + v^2$, $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x + y)$

b) $z = u^2v - v^2u$, $u = x \cos y$, $v = x \sin y$

[a) $z'_x = 2x + \frac{2}{x+y} \ln(x+y)$, $z'_y = \cos y + \frac{2}{x+y} \ln(x+y)$; b) $z'_x = 3x^2 \sin y \cos y (\cos y - \sin y)$, $z'_y = x^3 (\sin y + \cos y) (1 - 3 \sin y \cos y)$]

NP Vypočtete parciální derivace prvního řádu složených funkcí.

a) $z = u^v$, $u = \ln(x + y)$, $v = e^{\frac{x}{y}}$

[a) $z'_x = vu^{v-1} \frac{1}{x-y} + u^v \ln v \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}$, $z'_y = \frac{vu^{v-1}}{y-x} + u^v \ln u \frac{-e^{\frac{x}{y}}}{y^2}$]

(18) Určete první parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně danou rovnicí.

a) $\cos(ax + by - cz) = k(ax + by - cz)$

b) $x + y + z = e^z$

[a) $z'_x = \frac{a}{c}$, $z'_y = \frac{b}{c}$; b) $z'_x = \frac{1}{(x + y + z - 1)} = z'_y$]

NP Vypočtete první parciální derivace v bodě A funkce $z = f(x, y)$, která je dána implicitně danou rovnicí.

a) $e^z + x^2y + z + 5 = 0$, $A = [1, -6, 0]$

b) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = 0$, $A = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \right]$

$$[\text{a) } z'_x(A) = 6, z'_y(A) = -\frac{1}{2}, \text{b) } z'_x(A) = -1, z'_y(A) = 0]$$

Tečná rovina a normála plochy:

Tečná rovina τ a normála n plochy $z = f(x, y)$ v bodě $B_0 = [x_0; y_0; z_0]$ jsou dány rovnicemi tvaru:

$$\tau : (x - x_0) \cdot f_x(B_0) + (y - y_0) \cdot f_y(B_0) - (z - z_0) = 0$$

$$n : \frac{x - x_0}{f_x(B_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(B_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Je-li plocha dána implicitně $F(x; y; z) = 0$, pak

$$\tau : (x - x_0) \cdot F_x(B_0) + (y - y_0) \cdot F_y(B_0) + (z - z_0) \cdot F_z(B_0) = 0$$

$$n : \frac{x - x_0}{F_x(B_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(B_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(B_0)}$$

Pro normálový vektor \vec{n} tečné roviny platí $\vec{n} = (F_x(B_0); F_y(B_0); F_z(B_0))$. Normálu si můžeme vyjádřit parametricky ve tvaru:

$$x = x_0 + tF_x(B_0), y = y_0 + tF_y(B_0), z = z_0 + tF_z(B_0); t \in \mathbb{R}.$$

(19) Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě A plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně danou rovnicí.

$$\text{a) } x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0, A = [2, -6, ?]$$

$$\text{b) } (z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5, A = [1, 1, 2]$$

$$[\text{a) } \tau_1 : 2x - 6y + 3z - 49 = 0, \vec{n}_1 : x = 2 + 4t, y = -6 - 12t, z = 3 + 6t,$$

$$\tau_2 : 2x - 6y - 3z - 49 = 0, \vec{n}_2 : x = 2 + 4t, y = -6 - 12t, z = -3 - 6t ; \text{b) }$$

$$\tau : 2x + y + 11z - 25 = 0, \vec{n} : x = 1 + 2t, y = 1 + t, z = 2 + 11t]$$

NP Určete tečnou rovinu a normálu v bodě T plochy $z = f(x, y)$.

$$z = xy^2 - x^2y, T = [2; 1; ?].$$

$$[\tau : 3x + z - 4 = 0; \vec{n} : x = 2 + 3t, y = 1, z = -2 + t]$$

NP Určete tečnou rovinu a normálu v bodě T plochy $z = f(x, y)$.

$$z = \frac{y^2}{x^2}, T = [-1; 2; ?].$$

$$[\tau : 8x + 4y - z44 = 0; \vec{n} : x = -1 + 8t, y = 2 + 4t, z = 4 - t]$$

NP Určete derivaci ve směru \vec{s} v bodě A a gradient v bodě A funkce $z = f(x, y)$.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy, A = [3; 4], \vec{s} = (3; 4).$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\frac{19}{5}, \text{grad } z = -\frac{17}{5}\vec{i} - \frac{11}{5}\vec{j} \right]$$

NP Určete derivaci funkce $z = \ln(x^2 + y^2)$ v bodě $A = [1; 2]$.

a) ve směru tečného vektoru v bodě A ke křivce $y = 2\sqrt{x}$,

b) ve směru, v němž je derivace maximální.

$$\left[\text{a) } \frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\frac{3}{5}\sqrt{2}; \text{ b) } \frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = -\frac{2}{5}\sqrt{2} \right]$$

(20) Nalezněte lokální extrémů daných funkcí.

a) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$

b) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

c) $z = \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$

[a) [4; 4] - lok.max.; b) [-1; 2] - není, [0; 0] - lok.min., [-1; -2] a $[-\frac{5}{2}; 0]$ - lok.max.;

c) [3; 6] - lok.max.]

NP Nalezněte lokální extrémů daných funkcí.

a) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

b) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

[a) [5; 2] - lok.min.; b) [4; 4] - lok.max.]

NP Nalezněte vázané extrémů dané funkce při daných podmínkách.

a) $z = x + 2y$; podm. $x^2 + y^2 = 5$

b) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; podm. $x + y = 2$

[a) [1; 2] - lok.max., [-1; -2] - lok.nim.; b) [1; 1] - lok.min.]

NP Nalezněte vázané extrémů dané funkce při daných podmínkách.

a) $z = x + y$; podm. $xy = 1$

b) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; podm. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

[a) $[1; 1]$ - lok.max., $[-1; -1]$ - lok.nim.; b) $[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ - lok.min., $[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ - lok.max.]

NP Najděte absolutní extrémů daných funkcí.

- a) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$; na obdélníku $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$
- b) $z = x^2 - xy + y^2$; M je určena nerovnicí $|x| + |y| \leq 1$
- c) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$; na oblasti dané nerovnicí $x^2 + y^2 \leq 25$

[a) $[1; 2]$ - abs.max., $[1; 0]$ - abs.nim.; b) $[0; 1], [0; -1], [1; 0], [-1; 0]$ - abs.max., $[0; 0]$ - abs.min.; c) $[3; -4]$ - abs.min., $[-3; 4]$ - abs.max.]

REFERENCES

- [1] Novotný J.: *Matematika I - Základy lineární algebry*, CERM, FAST VUT Brno 2004.
- [2] Dlouhý, O. - Tryhuk, V.: *Matematika I - Diferenciální počet funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 2004.
- [3] Dlouhý, O. - Tryhuk, V.: *Matematika I - Diferenciální počet funkcí více reálných promenných*, CERM, FAST VUT Brno 2004.
- [4] Tryhuk, V. - Dlouhý, O.: *Matematika I, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Modul GA01_M01, studijní opory pro studijní program Geodézie a kartografie s kombinovanou formou studia, Fakulta stavební, Vysoké učení technické, Brno, 2004.
- [5] Chrastinová, V.: *Matematika, Vektorová algebra a analytická geometrie*, Modul 3, studijní opory pro studijní programy s kombinovanou formou studia, Fakulta stavební, Vysoké učení technické, Brno, 2004.
- [6] Daněček, J. - Dlouhý, O.: *Integrální počet I*, CERM, FAST VUT Brno 2003.
- [7] Daněček, J. - Dlouhý, O. - Příbyl, O.: *Matematika I, Modul 7, Neurčitý integrál*, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2007.
- [8] Daněček, J. - Dlouhý, O. - Příbyl, O.: *Matematika I, Modul 8, Určitý integrál*, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2007.
- [9] Tryhuk, V.: *Matematika I1 - Úvod do matematické logiky a teorie množin*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
- [10] Tryhuk, V.: *Matematika I2 - Reálná funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
- [11] Veverka, J. - Slatinský E.: *Matematika I3 - Diferenciální počet funkce jedné reálné promenné*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [12] Novotný J.: *Matematika I4 - Lineární algebra*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [13] Horňáková, D.: *Matematika I5 - Vektorová algebra*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [14] Horňáková, D.: *Matematika I6 - Analytická geometrie*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [15] Voráček, J.: *Matematika I7 - Neurčitý integrál*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [16] Voráček, J.: *Matematika III1 - Určitý integrál a jeho užití*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [17] Hřebíčková, J. - Slaběňáková, J. - Šafářová, H.: *Sbírka příkladů z matematiky II, Modul BA01-M11, Neurčitý a určitý integrál, diferenciální počet funkcí více proměnných, diferenciální rovnice*, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2008.
- [18] Daněček, J. - Dlouhý, O. - Koutková, H. - Prudilová, K. - Sekaninová, J. - Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematiky I.*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
- [19] Čermáková, H. - Hřebíčková, J. - Slaběňáková, J. - Šafářová, H.: *Sbírka příkladů z matematiky II.*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
- [20] Prudilová, K. - Sekaninová, J. - Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematiky III.*, CERM, FAST VUT Brno 1995.
- [21] Hřebíčková, J. - Ráček, J. - Slaběňáková, J.: *Diferenciální počet v Maple 7*, FAST VUT Brno, 2001, http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/matematika/diferencialni_pocet/.
- [22] Hřebíčková, J. - Ráček, J. - Slaběňáková, J.: *Integrální počet v Maple 7*, FAST VUT Brno, 2001, http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/matematika/integralni_pocet/.
- [23] Veverka, J.: *Diferenciální počet II*, Fakulta stavební, Brno 1982.
- [24] Eliaš, J. - Horvát, J. - Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1. časť*, SVTL, Bratislava 1965.
- [25] Černá, B.: *Cvičení z lineární algebry*, MZLU v Brně, Brno 1998.
- [26] Jelínek, Z. - Samotná O.: *Matematika - Integrální počet*, Skriptum VŠ zemědělské v Brně, SPN, Praha 1985.
- [27] Jirásek, F. - Kriegelstein, E. - Tichý, Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky I*, SNTL/ALFA, Praha 1987.
- [28] Karásek, J. - Maroš, B.: *Integrální počet, Matematika - Metodické pokyny pro cvičení*, CERM, FAST VUT Brno 1994.
- [29] Kříž, J. - Křížová, H.: *Diferenciální počet, metodické pokyny*, Fakulta strojní VUT, Brno 1978.

- [30] Vosmanská, G.: *Matematika*, MZLU v Brně, Brno 1997.
- [31] Online verze textů: *Riešené úlohy z matematiky 1*, Katedra Matematiky a Deskriptivnej geometrie, Stavebná fakulta, STU, Bratislava, <http://www-kmadg.svf.stuba.sk/skripta/skripta.pdf>.
- [32] Online verze textů: *Riešené úlohy z matematiky 2*, Katedra Matematiky a Deskriptivnej geometrie, Stavebná fakulta, STU, Bratislava, <http://www-kmadg.svf.stuba.sk/skripta2/skripta2.pdf>.