

**Příklad.** Je dána funkce předpisem

$$f : y = \ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

Určete definiční obor funkce  $D_f$ , předpis derivace  $f'$  a definiční obor derivace  $D_{f'}$ .

**Příklad.** Je dána funkce předpisem

$$f : y = \ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

Určete definiční obor funkce  $D_f$ , předpis derivace  $f'$  a definiční obor derivace  $D_{f'}$ .

**Řešení.** Z vlastností logaritmické funkce plyne:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R}; \frac{1 - x^2}{1 + x^2} > 0 \right\},$$

**Příklad.** Je dána funkce předpisem

$$f : y = \ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

Určete definiční obor funkce  $D_f$ , předpis derivace  $f'$  a definiční obor derivace  $D_{f'}$ .

**Řešení.** Z vlastností logaritmické funkce plyne:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R}; \frac{1 - x^2}{1 + x^2} > 0 \right\},$$

tedy množinu  $D_f$  budeme hledat jako řešení nerovnice  $1 - x^2 > 0 \Rightarrow D_f =$

**Příklad.** Je dána funkce předpisem

$$f : y = \ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

Určete definiční obor funkce  $D_f$ , předpis derivace  $f'$  a definiční obor derivace  $D_{f'}$ .

**Řešení.** Z vlastností logaritmické funkce plyne:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R}; \frac{1 - x^2}{1 + x^2} > 0 \right\},$$

tedy množinu  $D_f$  budeme hledat jako řešení nerovnice  $1 - x^2 > 0 \Rightarrow D_f = (-1; 1)$ .

**Příklad.** Je dána funkce předpisem

$$f : y = \ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

Určete definiční obor funkce  $D_f$ , předpis derivace  $f'$  a definiční obor derivace  $D_{f'}$ .

**Řešení.** Z vlastností logaritmické funkce plyne:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R}; \frac{1 - x^2}{1 + x^2} > 0 \right\},$$

tedy množinu  $D_f$  budeme hledat jako řešení nerovnice  $1 - x^2 > 0 \Rightarrow D_f = (-1; 1)$ .

V dalším budeme derivovat funkci  $f$ .

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$y' = \left( \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' \quad \underline{\underline{(?)}}$$

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$y' = \left( \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' =$$

(?)

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$\begin{aligned} y' &= \left( \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \\ &\stackrel{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\ &\stackrel{(?)}{=} \end{aligned}$$



Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$\begin{aligned}y' &= \left( \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \\ &\stackrel{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\ &\stackrel{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \\ &= \end{aligned}$$

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$\begin{aligned}y' &= \left( \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \\&\stackrel{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\&\stackrel{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \\&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)} = \\&= \end{aligned}$$

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$\begin{aligned}y' &= \left( \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \\&\stackrel{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\&\stackrel{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \\&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)} = \\&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{1+x^2} = \\&= \end{aligned}$$

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$\begin{aligned}y' &= \left( \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \\&\stackrel{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\&\stackrel{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \\&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)} = \\&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{1+x^2} = \\&= \frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{4x}{x^4-1}.\end{aligned}$$

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$\begin{aligned}y' &= \left( \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \\&\stackrel{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\&\stackrel{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \\&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)} = \\&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{1+x^2} = \\&= \frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{4x}{x^4-1}.\end{aligned}$$

Je vidět, že  $D_{f'} =$

Dvojklikem na symbol modrého otazníku vyvoláte kontextovou nápovědu.

Počítejme

$$\begin{aligned}y' &= \left( \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \\&\stackrel{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{(1-x^2)'(1+x^2) - (1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \\&\stackrel{(?)}{=} \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \\&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)} = \\&= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{1+x^2} = \\&= \frac{-4x}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{4x}{x^4-1}.\end{aligned}$$

Je vidět, že  $D_{f'} = D_f$ , tj. funkce  $f$  má derivaci v každém bodě svého definičního oboru.

**Variantsní postup.** *Všíímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce  $f$ . Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí*

$$\ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2} =$$

**Variální postup.** Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce  $f$ .  
Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí

$$\ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \ln (1 - x^2) - \ln (1 + x^2) .$$

Dostáváme

$$y' = \left( \ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)' = \left( \ln (1 - x^2) - \ln (1 + x^2) \right)' =$$

(?)  
=



**Variantsní postup.** Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce  $f$ .  
Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí

$$\ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \ln (1 - x^2) - \ln (1 + x^2) .$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} y' &= \left( \ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)' = \left( \ln (1 - x^2) - \ln (1 + x^2) \right)' = \\ &\stackrel{(?)}{=} \left( \ln (1 - x^2) \right)' - \left( \ln (1 + x^2) \right)' \stackrel{(?)}{=} \end{aligned}$$

**Variantsní postup.** Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce  $f$ .  
Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí

$$\ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \ln (1 - x^2) - \ln (1 + x^2) .$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} y' &= \left( \ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)' = \left( \ln (1 - x^2) - \ln (1 + x^2) \right)' = \\ &\stackrel{(?)}{=} \left( \ln (1 - x^2) \right)' - \left( \ln (1 + x^2) \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{1 - x^2} \cdot (1 - x^2)' - \frac{1}{1 + x^2} \cdot (1 + x^2)' = \\ &= \end{aligned}$$

**Variantsní postup.** Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce  $f$ .  
Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí

$$\ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = \ln(1-x^2) - \ln(1+x^2).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} y' &= \left( \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \left( \ln(1-x^2) - \ln(1+x^2) \right)' = \\ &\stackrel{(?)}{=} \left( \ln(1-x^2) \right)' - \left( \ln(1+x^2) \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{1-x^2} \cdot (1-x^2)' - \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' = \\ &= -\frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \end{aligned}$$

**Variantsní postup.** Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce  $f$ .  
Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí

$$\ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \ln (1 - x^2) - \ln (1 + x^2) .$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} y' &= \left( \ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)' = \left( \ln (1 - x^2) - \ln (1 + x^2) \right)' = \\ &\stackrel{(?)}{=} \left( \ln (1 - x^2) \right)' - \left( \ln (1 + x^2) \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{1 - x^2} \cdot (1 - x^2)' - \frac{1}{1 + x^2} \cdot (1 + x^2)' = \\ &= -\frac{2x}{1 - x^2} - \frac{2x}{1 + x^2} = -2x \cdot \left( \frac{1}{1 - x^2} + \frac{1}{1 + x^2} \right) = \\ &= \end{aligned}$$

**Variantsní postup.** Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce  $f$ .  
Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí

$$\ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = \ln(1-x^2) - \ln(1+x^2).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} y' &= \left( \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \left( \ln(1-x^2) - \ln(1+x^2) \right)' = \\ &\stackrel{(?)}{=} \left( \ln(1-x^2) \right)' - \left( \ln(1+x^2) \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{1-x^2} \cdot (1-x^2)' - \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' = \\ &= -\frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = -2x \cdot \left( \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) = \\ &= -2x \cdot \frac{1+x^2+1-x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} = \end{aligned}$$

**Variantsní postup.** Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce  $f$ .  
Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí

$$\ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = \ln(1-x^2) - \ln(1+x^2).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} y' &= \left( \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \left( \ln(1-x^2) - \ln(1+x^2) \right)' = \\ &\stackrel{(?)}{=} \left( \ln(1-x^2) \right)' - \left( \ln(1+x^2) \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{1-x^2} \cdot (1-x^2)' - \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' = \\ &= -\frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = -2x \cdot \left( \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) = \\ &= -2x \cdot \frac{1+x^2+1-x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{4x}{x^4-1}, \end{aligned}$$

**Variantsní postup.** Všímavý počtář možná zaznamenal, že před derivováním je možné upravit předpis funkce  $f$ . Podle pravidel o počítání s logaritmy totiž platí

$$\ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = \ln(1-x^2) - \ln(1+x^2).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} y' &= \left( \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)' = \left( \ln(1-x^2) - \ln(1+x^2) \right)' = \\ &\stackrel{(?)}{=} \left( \ln(1-x^2) \right)' - \left( \ln(1+x^2) \right)' \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{1-x^2} \cdot (1-x^2)' - \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' = \\ &= -\frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = -2x \cdot \left( \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) = \\ &= -2x \cdot \frac{1+x^2+1-x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{4x}{x^4-1}, \end{aligned}$$

což je stejný výsledek.

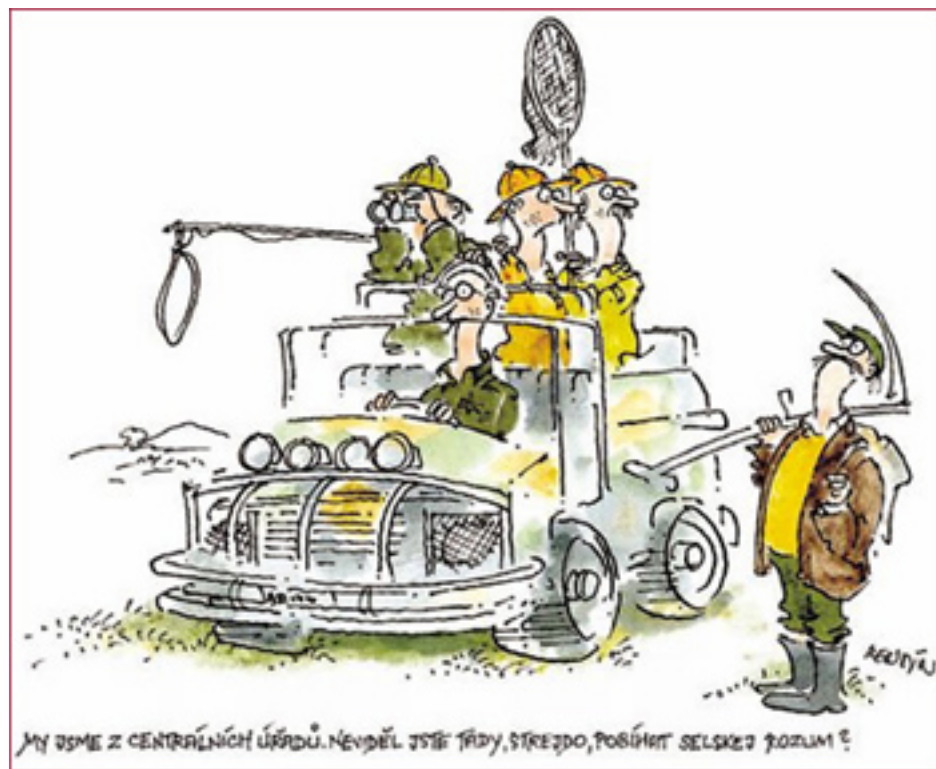
*Porovnejme oba předvedené způsoby řešení. Který z nich se Vám zdá náročnější? Dovolujeme si tvrdit, že první způsob bez zjednodušování předpisu funkce  $f$ .*

*(Opět se ukazuje, že znát z paměti vzorce středoškolské matematiky a umět je chytře používat, se určitě vyplatí:-))*



Porovnejme oba předvedené způsoby řešení. Který z nich se Vám zdá náročnější? Dovolujeme si tvrdit, že první způsob bez zjednodušování předpisu funkce  $f$ .

(Opět se ukazuje, že znát z paměti vzorce středoškolské matematiky a umět je chytře používat, se určitě vyplatí:-))



[Konec]