

**Příklad.** Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7} dx.$$

**Příklad.** Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7} dx.$$

**Řešení.** Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na „úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2 + 5x + 7 =$$

**Příklad.** Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7} dx.$$

**Řešení.** Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na „úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 =$$

**Příklad.** Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7} dx.$$

**Řešení.** Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na „úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

**Příklad.** Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7} dx.$$

**Řešení.** Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na „úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce  $x + \frac{5}{2} = t$  dostáváme

**Příklad.** Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7} dx.$$

**Řešení.** Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na „úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce  $x + \frac{5}{2} = t$  dostáváme (sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se, kam co dosadit):

$$I = \int \frac{4x - 1}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{5}{2} = t \\ x = t - \frac{5}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| =$$

**Příklad.** Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7} dx.$$

**Řešení.** Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na „úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce  $x + \frac{5}{2} = t$  dostáváme (sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se, kam co dosadit):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4x - 1}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{5}{2} = t \\ x = t - \frac{5}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{4\left(t - \frac{5}{2}\right) - 1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \end{aligned}$$

**Příklad.** Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7} dx.$$

**Řešení.** Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na „úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce  $x + \frac{5}{2} = t$  dostáváme (sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se, kam co dosadit):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4x - 1}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{5}{2} = t \\ x = t - \frac{5}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{4\left(t - \frac{5}{2}\right) - 1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \int \frac{4t - 11}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \end{aligned}$$



**Příklad.** Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7} dx.$$

**Řešení.** Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na „úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce  $x + \frac{5}{2} = t$  dostáváme (sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se, kam co dosadit):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4x - 1}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{5}{2} = t \\ x = t - \frac{5}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{4\left(t - \frac{5}{2}\right) - 1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \int \frac{4t - 11}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = 4I_1 - 11I_2, \end{aligned}$$

kde

$$I_1 = \int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt,$$

**Příklad.** Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7} dx.$$

**Řešení.** Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na „úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce  $x + \frac{5}{2} = t$  dostáváme (sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se, kam co dosadit):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4x - 1}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{5}{2} = t \\ x = t - \frac{5}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{4\left(t - \frac{5}{2}\right) - 1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \int \frac{4t - 11}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = 4I_1 - 11I_2, \end{aligned}$$

kde

$$I_1 = \int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt, \quad I_2 = \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt.$$

**Příklad.** Spočtěte integrál

$$I = \int \frac{4x - 1}{x^2 + 5x + 7} dx.$$

**Řešení.** Nejprve si pro lepší porozumění upravme (doplněním na „úplný čtverec“) jmenovatel daného zlomku:

$$x^2 + 5x + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 7 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Postupně, s použitím substituce  $x + \frac{5}{2} = t$  dostáváme (sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se, kam co dosadit):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4x - 1}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{5}{2} = t \\ x = t - \frac{5}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{4\left(t - \frac{5}{2}\right) - 1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \int \frac{4t - 11}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = 4I_1 - 11I_2, \end{aligned}$$

kde

$$I_1 = \int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt, \quad I_2 = \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt.$$

Oba dílčí integrály  $I_{1,2}$  nyní postupně spočítáme.

Integrál  $I_1$  je typu  $\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt$  – tj. „derivace jmenovatele v čitateli“.

Integrál  $I_1$  je typu  $\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt$  – tj. „derivace jmenovatele v čitateli“.

Postupně tedy máme (opět sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se ve výpočtech)

$$I_1 = \int \frac{t dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{l} t^2 + \frac{3}{4} = u \\ 2t dt = du \\ t dt = \frac{1}{2} du \end{array} \right| =$$

Integrál  $I_1$  je typu  $\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt$  – tj. „derivace jmenovatele v čitateli“.

Postupně tedy máme (opět sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se ve výpočtech)

$$I_1 = \int \frac{t dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{l} t^2 + \frac{3}{4} = u \\ 2t dt = du \\ t dt = \frac{1}{2} du \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} =$$

Integrál  $I_1$  je typu  $\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt$  – tj. „derivace jmenovatele v čitateli“.

Postupně tedy máme (opět sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se ve výpočtech)

$$I_1 = \int \frac{t dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{l} t^2 + \frac{3}{4} = u \\ 2t dt = du \\ t dt = \frac{1}{2} du \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| =$$

Integrál  $I_1$  je typu  $\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt$  – tj. „derivace jmenovatele v čitateli“.

Postupně tedy máme (opět sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se ve výpočtech)

$$I_1 = \int \frac{t dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{l} t^2 + \frac{3}{4} = u \\ 2t dt = du \\ t dt = \frac{1}{2} du \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| = \ln \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}} + c_1.$$



Integrál  $I_1$  je typu  $\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt$  – tj. „derivace jmenovatele v čitateli“.

Postupně tedy máme (opět sledujte barvy, pomohou Vám zorientovat se ve výpočtech)

$$I_1 = \int \frac{t dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{l} t^2 + \frac{3}{4} = u \\ 2t dt = du \\ t dt = \frac{1}{2} du \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| = \ln \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}} + c_1.$$

**Úkol pro Vás.** Zdůvodněte, proč jsme mohli v posledním kroku výpočtu vypustit absolutní hodnotu. Je taková úprava korektní a proč?

Integrál  $I_2$  vede na přímé použití vzorce

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + c,$$

ve kterém klademe  $a^2 = \frac{3}{4}$ , tj.  $\frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Integrál  $I_2$  vede na přímé použití vzorce

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + c,$$

ve kterém klademe  $a^2 = \frac{3}{4}$ , tj.  $\frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Přímým výpočtem okamžitě dostáváme:

$$I_2 = \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt =$$

Integrál  $I_2$  vede na přímé použití vzorce

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + c,$$

ve kterém klademe  $a^2 = \frac{3}{4}$ , tj.  $\frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Přímým výpočtem okamžitě dostáváme:

$$I_2 = \int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Postupně nám vyšlo:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln \left( t^2 + \frac{3}{4} \right) + c_1, \quad I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Postupně nám vyšlo:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln \left( t^2 + \frac{3}{4} \right) + c_1, \quad I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Dohromady potom máme

$$I = 4I_1 - 11I_2 =$$

Postupně nám vyšlo:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln \left( t^2 + \frac{3}{4} \right) + c_1, \quad I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Dohromady potom máme

$$I = 4I_1 - 11I_2 = 2 \ln \left( t^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{22}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c,$$

kde  $c := c_1 + c_2$ .

Postupně nám vyšlo:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln \left( t^2 + \frac{3}{4} \right) + c_1, \quad I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Dohromady potom máme

$$I = 4I_1 - 11I_2 = 2 \ln \left( t^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{22}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c,$$

kde  $c := c_1 + c_2$ .

Když se vrátíme zpět k proměnné  $x$ , tj. všude dosadíme  $t = x + \frac{5}{2}$ , dostáváme po úpravě konečný výsledek:



Postupně nám vyšlo:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln \left( t^2 + \frac{3}{4} \right) + c_1, \quad I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Dohromady potom máme

$$I = 4I_1 - 11I_2 = 2 \ln \left( t^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{22}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c,$$

kde  $c := c_1 + c_2$ .

Když se vrátíme zpět k proměnné  $x$ , tj. všude dosadíme  $t = x + \frac{5}{2}$ , dostáváme po úpravě konečný výsledek:

$$\underline{\underline{I = 2 \ln \left( x^2 + 5x + 7 \right) - \frac{22}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 5}{\sqrt{3}} + c.}}$$

Postupně nám vyšlo:

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln \left( t^2 + \frac{3}{4} \right) + c_1, \quad I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c_2.$$

Dohromady potom máme

$$I = 4I_1 - 11I_2 = 2 \ln \left( t^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{22}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c,$$

kde  $c := c_1 + c_2$ .

Když se vrátíme zpět k proměnné  $x$ , tj. všude dosadíme  $t = x + \frac{5}{2}$ , dostáváme po úpravě konečný výsledek:

$$\underline{\underline{I = 2 \ln \left( x^2 + 5x + 7 \right) - \frac{22}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 5}{\sqrt{3}} + c.}}$$

**Komentář ke konečnému výsledku.** Pokud Vám není hned zřejmé, kde se ve výsledku vzal „modře obarvený“ kvadratický trojčlen, vzpomeňte si na úpravu „doplnění na úplný čtverec“, se kterou jsme pracovali na začátku našeho počítání:

$$t^2 + \frac{3}{4} = \left( x + \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 + 5x + 7.$$