FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

GA01 Matematika I

Analytická geometrie

7.6 Aplikace vektorové algebry v analytické geometrii v prostoru $\mathbb{E}_3$

14. Určete rovnici roviny, která je dána body A, B a C. $A = [-1; 2; 3]$, $B = [2; -4; 5]$, $C = [2; 2; -1]$.

    [$\rho : 4x + 3y + 3z - 11 = 0$]

15. Počátkem souřadné soustavy veďte rovinu kolmou k rovinám α a β. $\alpha : 2x - y - z = 0$, $\beta : x + y - z - 7 = 0$.

    [$\rho : 2x + y + 3z = 0$]

16. Určete rovnici roviny, která je rovnoběžná s osou x a přímkou p a prochází bodem M.
    $p : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$, $M = [1; -2; 3]$.

    [$\rho : 3y + z + 3 = 0$]

17. Určete vzdálenost bodu P od roviny ρ. $P = [3; 9; 1]$, $\rho : x - 2y + 2z - 3 = 0$.

    [$d = \dfrac{16}{3}$]

18. Určete vzdálenost bodu P od přímky p. $P = [1; -2; 5]$, $p : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

    [$d = 2\sqrt{\dfrac{11}{6}}$]

19. Určete průsečík přímky p s rovinou ρ. $p : \begin{cases} x - 2y + 3z - 7 = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$, $\rho : 2x + 2y - z - 1 = 0$.

    [$R = [2; -1; 1]$]

20. Určete průsečíky roviny ρ se souřadnými osami. $\rho : 2x - y + 3z - 6 = 0$.

    [$P = [3; 0; 0]$, $Q = [0; -6; 0]$, $R = [0; 0; 2]$]

21. Sestrojte kolmý průmět bodu A do roviny ρ a délku tohoto kolmého průmětu. $A = [4; -3; 1]$, $\rho : x + 2y - z - 3 = 0$.

    [$R = [5; -1; 0]$, $d = \sqrt{6}$]

22. Sestrojte kolmý průmět bodu M na přímku p. $M = [3; 2; 6]$, $p : \begin{cases} x = t \\ y = -7 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

[$R = [3; -1; 0]$, $d = \sqrt{45}$]

23. Na přímce p najděte bod X stejně vzdálený od bodů A a B. $p : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x - y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$, $A = [3; 11; 4]$, $B = [-5; -13; -2]$.

[$X = [2; -3; 5]$]

24. Určete úhel dvou rovin α a β. $\alpha : 3x - y + 2z + 15 = 0$, $\beta : 5x + 9y - 3z - 1 = 0$.

[$\varphi = \frac{\pi}{2}$]

25. Určete odchylku přímky p od roviny ρ. $p : \begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ 3x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$, $\rho : 2x + y + z - 4 = 0$.

[$\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$]

26. Určete vzájemnou polohu dvou přímek p, q.

(a) $p : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 3y + 2z - 14 = 0 \end{cases}$, $q : \begin{cases} x + 5y - 6z + 34 = 0 \\ -6x + 2y + z + 9 = 0 \end{cases}$

(b) $p : \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $q : \begin{cases} x - y - z - 4 = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$

(c) $p : \begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $q : \begin{cases} x + y - z - 9 = 0 \\ 3x - y - z - 12 = 0 \end{cases}$

[(a) – různoběžné, (b) – mimoběžné, (c) – rovnoběžné]

27. Jsou dány body A a B. Ověřte, že přímky p a q jsou rovnoběžné a určete jejich vzdálenost. $A = [-2; 1; 2]$, $B = [3; 3; 0]$, $p \equiv AB$, $q : \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$.

[$d = 2\sqrt{17}$]

28. Určete obecnou rovnici roviny procházející body $A = [-1; 2; 4]$, $B = [2; -1; -3]$, $C = [5, 4, 8]$.

[$\rho : x - 27y + 12z + 7 = 0$]

29. Napište obecnou rovnici roviny, která je dána rovnoběžkami a, b.
$a : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$, $b : \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$.

[$\rho: x + y - z - 1 = 0$]

30. Napište obecnou rovnici roviny ρ, procházející bodem N, kolmé k přímce p a vypočítejte vzdálenost bodu N od přímky p. $N = [3; 1; -2]$, $p: \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

[$\rho: 5x + 2y + z - 15 = 0$, $d = \sqrt{24}$]

31. Najděte kolmý průmět bodu A na rovinu ρ. $A = [1; -2; 1]$, $\rho: 3x + 2y - 4z - 5 = 0$.

[$A_1 = \left[\frac{59}{29}; -\frac{38}{29}; -\frac{11}{29}\right]$]

32. Určete rovnici roviny ρ, která prochází body A, B a je kolmá k rovině α. $A = [1; 2; 3]$, $B = [-1; 3; 2]$, $\alpha: 2x - y - z - 10 = 0$.

[$\rho: 2x + 4y - 10 = 0$]

33. Napište obecnou rovnici roviny ρ, procházející bodem N a kolmé k přímce p. na přímce q najděte bod ve vzdálenosti $d = \sqrt{14}$ od roviny ρ. $N = [4; -1; 2]$, $p: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$, $q: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

[$\rho: 2x + 3y + z - 7 = 0$, $Q_1 = [8; -14; 13]$, $Q_2 = [-6; 16; -15]$]

34. Jsou dány body A, B a rovina α. Sestrojte rovinu procházející body A, B a kolmou na rovinu α. $A = [1; -4; 2]$, $B = [-2; 3; -3]$, $\alpha: 2x - 3y + 5z = 0$.

[$\rho: 4x + y - z + 2 = 0$]

35. Určete průsečík tří rovin $\rho_1: 2x - y + 3z + 13 = 0$, $\rho_2: 2x - 2y + z = 0$, $\rho_3: 7x - 3y + 4z + 7 = 0$.

[$R = [2; -1; -6]$]

36. Určete vzdálenost bodu od roviny.

   (a) $A = [3; 1; -1]$, $\rho: 22x + 4y - 2z - 45 = 0$
   (b) $A = [4; 3; -2]$, $\rho: 3x - y + 5z + 1 = 0$

[(a) – $d = \dfrac{27}{\sqrt{504}} = 1,203$, (b) – $d = 0$]

37. Jsou dány roviny $\rho \equiv (A; x)$, $\sigma \equiv (A; y)$, $A = [-5; 16; 12]$, určete úhel těchto dvou rovin.

[$\varphi = 70°4'$]

38. Najděte rovnici roviny, která prochází bodem $A = [2; 1; -2]$ a která je rovnoběžná s vektory $\vec{a} = (3; 2; 4)$, $\vec{b} = (3; 5; 2)$.

[$\rho: 16x - 6y - 9z - 44 = 0$]

39. Určete výšku čtyřstěnu z vrcholu V na stěnu ABC. $V = [0; 6; 4]$, $A = [3; 5; 3]$, $B = [-2; 11; -5]$, $C = [1; -1; 4]$.

[$v = 3j$]

40. Bodem A veďte přímku p rovnoběžnou s přímkou q. $A = [2; -5; 3]$, $q : \begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$.

[$p : \begin{cases} x = 2 - 11t \\ y = -5 + 17t \\ z = 3 + 13t \end{cases}$]

41. Najděte průsečík přímky p s rovinou ρ. $p : \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \end{cases}$, $\rho : 9x + 5y + z + 3 = 0$.

[$R = [0; 0; 3]$]

42. Určete kolmý průmět p_1 přímky p, která je určena body A a B, do roviny ρ. $A = [-1; 3; 7]$, $B = [2; -4; 5]$, $\rho : 2x + 3y - z + 6 = 0$.

[$p_1 : \begin{cases} 2x + 3y - z + 6 = 0 \\ 13x - y + 23z - 145 = 0 \end{cases}$]