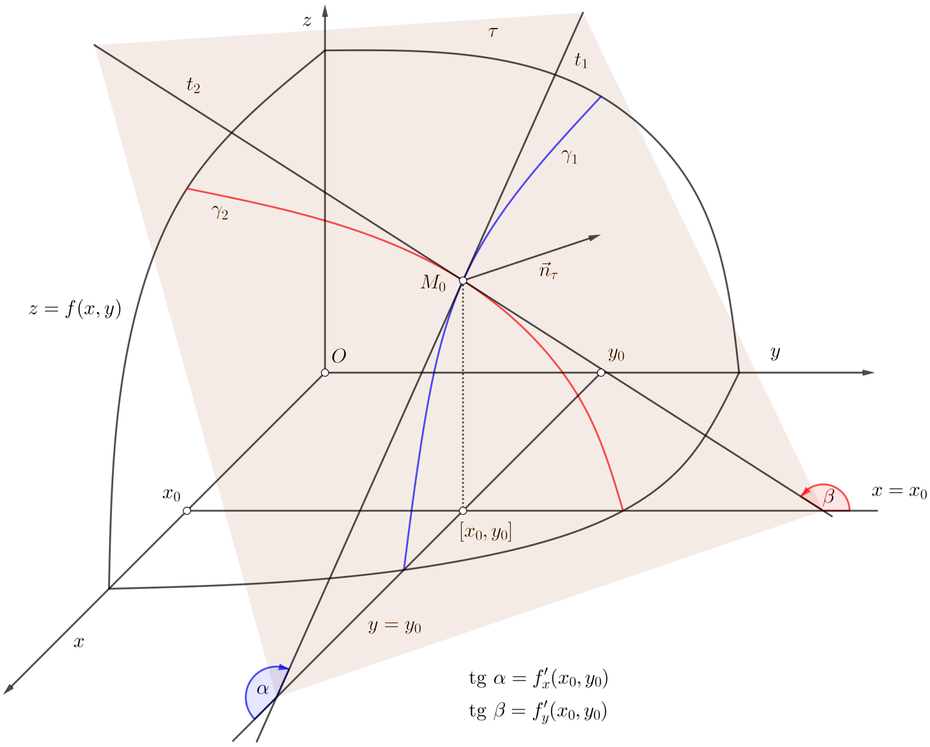
GA04 Matematika II

Cvičení č. 10

Tečná rovina a normála plochy v bodě $M = [x_0, y_0, z_0]$



a) explicitní tvar plochy $z = f(xy)$

$$\tau: \quad z - z_0 = f'_x(M)(x - x_0) + f'_y(M)(y - y_0) \quad \text{nebo}$$
$$f'_x(M)(x - x_0) + f'_y(M)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$n: \quad x = x_0 + f'_x(M) \cdot s$$
$$y = y_0 + f'_y(M) \cdot s \qquad s \in \mathbb{R}$$
$$z = z_0 - s$$

$$\vec{s}_n = \vec{n}_\tau = (f'_x(M), f'_y(M), -1)$$

b) implicitní tvar plochy $F(x,y,z)=0$

$$\tau: \quad F'_x(M)(x-x_0)+F'_y(M)(y-y_0)+F'_z(M)(z-z_0)=0$$

$$\begin{aligned} n: \quad & x = x_0 + F'_x(M)\cdot t \\ & y = y_0 + F'_y(M)\cdot t \qquad t\in\mathbb{R} \\ & z = z_0 + F'_z(M)\cdot t \\ & \vec{s}_n = \vec{n}_\tau = (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)) \end{aligned}$$

c) gradient v bodě $M=[x_0,y_0,z_0]$

$$\begin{aligned} \text{grad}\, f(x,y) &= (f'_x(M), f'_y(M), -1) \\ \text{grad}\, F(x,y,z) &= (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M) \\ \text{grad} &\perp \tau \\ \text{grad} &\parallel n \end{aligned}$$

Poznámky k příkladům:

1. Máte-li sestrojit tečnou rovinu nebo normálu plochy v zadaném bodě, dosadíte do výše uvedených vzorců
2. Pokud řešíte úlohu sestrojit tečnou rovinu plochy, která je rovnoběžná se zadanou rovinou ρ, využijete faktu, že grad $f(x,y)$ resp. grad $F(x,y,z)$ je vlastně jen k-násobkem normálového vektoru zadané roviny:

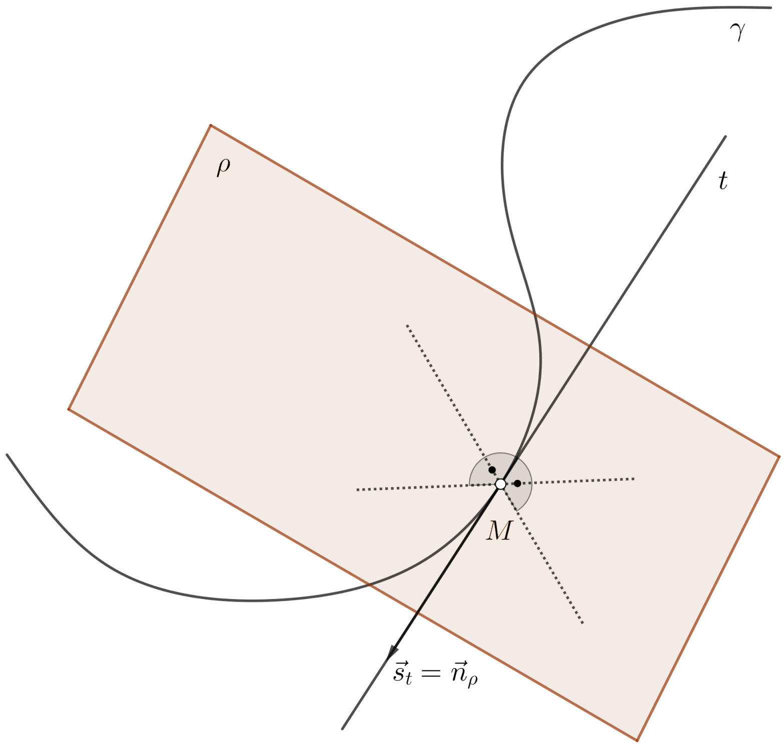
   $$\begin{aligned} \text{grad}\, f(x,y) &= k\cdot\vec{n}_\rho \quad \text{nebo} \\ \text{grad}\, F(x,y,z) &= k\cdot\vec{n}_\rho \end{aligned}$$

   Odsud si vyjádříte x, y a z pomocí k a dosadíte do rovnice plochy. Hodnoty k mám určí tečné body, ve kterých je tečná rovina τ rovnoběžná se zadanou rovinou ρ. Dál se postupuje podle bodu 1.
   Stejným způsobem řešíte hledání tečné roviny kolmé k zadané přímce p. Jen místo normálového vektoru budete uvažovat směrový vektor přímky $\vec{s}_p$.
3. Řešíte-li úlohu sestrojit tečnou rovinu, která je kolmá k zadaným rovinám α a β, využijete vztahu:

   $$\vec{n}_\tau \perp (\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta).$$

   Dále postupujete podle 2.

Tečna a normálová rovina prostorové křivky v bodě $M = [x_0, y_0, z_0]$



$$\gamma: \quad \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \qquad t \in \langle \alpha, \beta \rangle \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

$$t: \quad \begin{aligned} x &= x_0 + x_t'(M) \cdot s \\ y &= y_0 + y_t'(M) \cdot s \qquad s \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 + z_t'(M) \cdot s \end{aligned}$$

$$\rho: \quad x_t'(M)(x - x_0) + y_t'(M)(y - y_0) + z_t'(M)(z - z_0) = 0$$

$$\vec{s}_t = \vec{n}_\rho = (x_t'(M), y_t'(M), z_t'(M))$$

Poznámky k příkladům:

1. Máte-li sestrojit tečnu nebo normálovou rovinu prostorové křivky v zadaném bodě, dosadíte do výše uvedených vzorců

2. Pokud řešíte úlohu sestrojit tečnu prostorové křivky, která je dána jako průsečnice dvou ploch F a G, využijete vztahu:
$$\vec{s}_t \perp (\text{grad } F, \text{grad } G),$$
$\vec{s}_t$ tedy určíte pomocí vektorového součinu a poté dosadíte do výše uvedených vzorců.

3. Řešíte-li úlohu sestrojit tečnu, která je kolmá k zadané rovině ν, využijete toho, že $\vec{s}_t \cdot \vec{n}_\nu = 0$.