GA04 Matematika II
pro obor Geodézie a kartografie

1. Pojem primitivní funkce. Vlastnosti neurčitého integrálu. Integrační metody pro neurčitý integrál.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Brno, 2020

Základní literatura

- Daněček, Josef – Dlouhý, Oldřich – Přibyl, Oto: *Matematika I, Modul 7, Neurčitý integrál*, Fakulta stavební VUT, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2007.

Doporučené materiály

- Vítovec, Jiří: *Integrální počet - I. část (neurčitý integrál a základní integrační metody)*, Přednášky z Matematiky, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, Brno.
- Krupková, Vlasta – Fuchs, Petr: *Matematika 1 (Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika)*, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, Brno 2014. http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/vystupy.php
- Schwarz, Rudolf: *BA002 (BAA002) – Matematika 2 (Environmentálně vyspělé budovy)*, Materiály z matematiky a deskriptivní geometrie pro samostatné studium, Fakulta stavební VUT, Brno. http://rschwarz.wz.cz/fast/Mat2/BA002.htm

Základní vzorce na integrovaní

- ✓ $\displaystyle\int k \,\mathrm{d}x = kx + c,$
- ✓ $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1,$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + c, x \neq 0,$
- ✓ $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c,$
- ✓ $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1,$
- ✓ $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c,$
- ✓ $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c,$

Základní vzorce na integrovaní

- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c,\ x \neq (2k+1)\frac{1}{2}\pi,$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c,\ x \neq k\pi,$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + A^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + c,$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - A^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{x-A}{x+A}\right| + c,\ A > 0,\ |x| \neq A,$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{A} + c,\ A > 0,\ |x| < A,$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}}\,\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c,\ B \neq 0,$

Základní vzorce na integrovaní

- ✓ $\displaystyle\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + c,$
- ✓ $\displaystyle\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + c,$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tgh} x + c,$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotgh} x + c,$

Základní vzorce na integrovaní

- ✓ $\displaystyle\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x,$
- ✓ $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x,$
- ✓ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c,$
- ✓ $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$

Substituční metoda

$$\dots$$

Integrace metodou per partes

Věta (Metoda per partes)

Nechť funkce u, v mají spojité derivace na otevřeném intervalu I. Potom na I platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

jestliže integrály na pravé straně rovnosti existují.

Důkaz: Věta o integraci per partes plyne ze vzorce pro derivaci součinu.

$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v + uv' \\ uv' &= (uv)' - u'v \\ \int uv'\,\mathrm{d}x &= uv - \int u'v\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Integrace metodou per partes

Metoda per partes (po částech) částečně nahrazuje chybějící pravidlo pro integraci součinu. Nejčastěji se jedná o součin polynomu P(x) a jiné elementární funkce, tj. např. (pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}$):

$$\int P(x)e^{ax}\,\mathrm{d}x, \int P(x)\sin(ax)\,\mathrm{d}x, \int P(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int P(x)\ln x\,\mathrm{d}x, \int P(x)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x, \int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x\ldots$$

Poznámka

- Jako funkci u, tedy tu, kterou derivujeme, volíme zpravidla takovou funkci, jež se při derivování „vylepší“.
- Nechť $P_n(x)$ je polynom stupně n, $a \in \mathbb{R}$ a integrujeme součin

$$\int P_n(x) f(x) \, \mathrm{d}x.$$

  (i) Je-li $f(x)$ funkce $\mathrm{e}^{ax}, \sin(ax), \cos(ax)$, pak volíme $u = P_n(x)$.

  (ii) Je-li $f(x)$ funkce $\ln x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$, pak volíme $u = f(x)$ a to i v případě, že $P_n(x) = 1$.

- Metodu per partes lze i použít opakovaně. V případě (i) je nutné ji použít dokonce n krát.

Příklad 1.4.1

Vypočtěte integrály

(i) $\displaystyle\int xe^x \,\mathrm{d}x,$

(ii) $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x,$

(iii) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2} \,\mathrm{d}x,$

(iv) $\displaystyle\int x^3 \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x,$

Příklad 1.4.2

Vypočtěte integrál

$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Analogickým způsobem lze počítat integrály

$$\int e^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x, \quad \int e^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x$$

na $\mathbb{R}$, kde a, b jsou libovolné reálné konstanty.

Příklad 1.4.3

Kombinací substituční metody a metody per partes vypočítejte integrály

(i) $\displaystyle\int x^5 e^{x^2}\,\mathrm{d}x,$

(ii) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x.$

Děkuji za pozornost!