



FACULTY OF CIVIL institute
ENGINEERING of mathematics
and descriptive geometry

GA04 Matematika II pro obor Geodézie a kartografie

2. Integrace racionální funkce.
Integrace goniometrických funkcí.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Brno, 2020

- Daněček, Josef – Dlouhý, Oldřich – Příbyl, Oto: *Matematika I, Modul 7, Neurčitý integrál*, Fakulta stavební VUT, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2007.

- Vítovec, Jiří: *Integrální počet - II. část (další integrační postupy pro některé typy funkcí)*, Přednášky z Matematiky, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, Brno.
- Krupková, Vlasta – Fuchs, Petr: *Matematika 1 (Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika)*, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, Brno 2014.
<http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/vystupy.php>
- Schwarz, Rudolf: *BA002 (BAA002) – Matematika 2 (Environmentálně vyspělé budovy)*, Materiály z matematiky a deskriptivní geometrie pro samostatné studium, Fakulta stavební VUT, Brno.
<http://rschwarz.wz.cz/fast/Mat2/BA002.htm>

- (i) Každou racionální neryze lomenou funkci $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde P_n a Q_m jsou polynomy stupně n a m , $n \geq m$, umíme dělením převést na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce, tj.

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)},$$

kde S_{n-m} a T_k jsou polynomy stupně $(n - m)$ a k , kde $k < m$.

- (ii) Dále každou racionální ryze lomenou funkci umíme rozložit na součet parciálních zlomků.

(iii) K zintegrování libovolné racionální lomené funkce nám stačí umět počítat následující 4 typy integrálů z parciálních zlomků:

1. $\int \frac{A}{ax+b} dx,$

3. $\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} dx,$

2. $\int \frac{A}{(ax+b)^n} dx, n \in \mathbb{N},$

4. $\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n} dx, n \in \mathbb{N},$

kde A, B, C, a, b, c jsou reálná čísla a $D = b^2 - 4ac < 0$.

1. a 2. typ řešíme buď substitucí $ax+b=t$, která převede tento typ na tabulkové integrály $\int t^{-1} dt$, $\int t^{-n} dt$ nebo pomocí vzorečků

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c \quad a \quad \int \frac{1}{f(ax+b)} dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c.$$

Příklad 2.1

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{3}{2x - 8} dx.$$

Příklad 2.2.1

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{3}{(2x - 8)^3} dx.$$

Příklad 2.2.2

Vypočtete integrál

$$\int \frac{1}{(3x + 4)^5} dx.$$

3. typ řešíme převedením na součet integrálu typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ a integrálu typu $\int \frac{D}{ax^2 + bx + c} dx$, kde druhý integrál po doplnění jmenovatele na čtverec řešíme vzorcem $\int \frac{1}{x^2 + A^2} dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + c$.

Příklad 2.3.1

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{x}{x^2 + 3x + 3} dx.$$

Příklad 2.3.2

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2x + 1}{9x^2 + 6x + 5} dx.$$

Příklad 2.3.3

Vypočtete integrál

$$\int \frac{3x - 6}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

Poznámka

3. typ, kde ale $D = b^2 - 4ac \geq 0$, řešíme buď rozložením na součet dvou parciálních zlomků 1. typu a dointegrováním nebo můžeme použít i vzorec

$$\int \frac{1}{x^2 - A^2} dx = \frac{1}{2A} \ln \left| \frac{x - A}{x + A} \right| + c.$$

Příklad 2.4

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{3}{2x^2 - 12x + 10} dx.$$

4. typ se řeší podobně jako 3. typ – nejprve integrand upravíme na součet integrálu typu $\int \frac{f'(x)}{(f(x))^n} dx$ a integrálu typu $\int \frac{D}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$, kde druhý integrál po doplnění jmenovatele na čtverec $\int \frac{1}{(x^2 + A^2)^n} dx$ řešíme pomocí rekurentní formule.

$$\int \frac{f'(x)}{(f(x))^n} dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(f(x))^{n-1}}$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + A^2)^n} dx = \frac{1}{2(n-1)A^2} \left(\frac{x}{(x^2 + A^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{1}{(x^2 + A^2)^{n-1}} \right)$$

Příklad 2.5.1

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2x + 3}{(4x^2 - 4x + 3)^2} dx.$$

Příklad 2.5.2

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{4x - 1}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx.$$

$$✓ \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$✓ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$✓ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$✓ \sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$✓ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$✓ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$✓ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Polynom n proměnných

$$P(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdots u_n^{k_n},$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \in \mathbb{R}$, k_1, m_i jsou celá nezáporná čísla

Racionální funkce n proměnných

$$R(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{P(u_1, u_2, \dots, u_n)}{Q(u_1, u_2, \dots, u_n)}$$

$$\text{Typ } \int R(\sin x, \cos x) dx$$

Nechť

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$$

je racionální funkce dvou proměnných $u = \sin x$ a $v = \cos x$. Integraci funkcí tohoto typu lze převést na integraci funkcí racionálních v proměnné t zavedením následujících substitucí:

- (i) Platí-li $R(-u, v) = -R(u, v)$, integrant je lichá funkce vůči proměnné $\sin x$, pak volíme substituci

$$t = \cos x.$$

- (ii) Platí-li $R(u, -v) = -R(u, v)$, integrant je lichá funkce vůči proměnné $\cos x$, pak volíme substituci

$$t = \sin x.$$

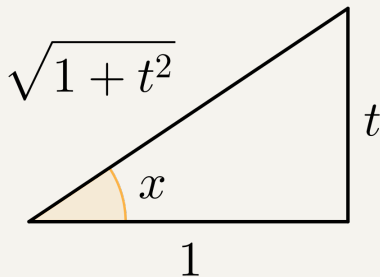
- (iii) Platí-li $R(-u, -v) = R(u, v)$, integrant je sudá funkce vůči proměnné $\sin x$ a $\cos x$ současně, pak volíme substituci

$$t = \operatorname{tg} x.$$

- (iv) V ostatních případech lze volit univerzální substituci

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Substitute $t = \operatorname{tg} x$



$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$dx = \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Odvození:

$$t = \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt.$$

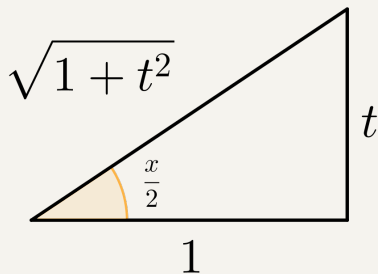
Poznámka

Je-li integrant sudá funkce vůči proměnné $\sin x$ a $\cos x$ současně, volíme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Ta ovšem, podobně jako univerzální substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, vede na složité úpravy a výpočty integrálů z racionálně lomené funkce. Proto se v praxi, zvláště pokud jsou v integrantu pouze součiny či podíly sinů a kosinů v sudých mocninách, používají nejprve vzorce

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad a \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

které převedou integrant na výraz se siny a kosiny v nižších, nejlépe lichých, mocninách s násobným argumentem. Poté již lze zpravidla buď volit jednodušší substituci za sinus či kosinus, nebo dopočítat integrál přímo.

Univerzální substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$



$$\sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Odvození:

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Příklad 2.6

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\cos^3 x}{1+4\sin^2 x} dx.$$

Příklad 2.7

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{4 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x} dx.$$

Příklad 2.8

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{4 - 5 \sin x} dx.$$

Typ $\int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx$, $\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx$

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. K výpočtu integrálů

$$\int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx \quad \int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx \quad \int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx$$

použijeme vzorce

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x],$$

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x].$$

$$\text{Typ } \int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

Nechť m, n jsou celá nezáporná a sudá čísla. Pro výpočet integrálu

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

použijeme výše uvedené vzorce

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Příklad 2.9

Vypočtete integrál

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx.$$

Příklad 2.10

Vypočtete integrál

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx.$$

Děkuji za pozornost!

