GA04 Matematika II pro obor Geodézie a kartografie

2. Integrace racionální funkce. Integrace goniometrických funkcí.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Brno, 2020

Základní literatura

- Daněček, Josef – Dlouhý, Oldřich – Přibyl, Oto: *Matematika I, Modul 7, Neurčitý integrál*, Fakulta stavební VUT, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2007.

Doporučené materiály

- Vítovec, Jiří: *Integrální počet - II. část (další integrační postupy pro některé typy funkcí)*, Přednášky z Matematiky, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, Brno.
- Krupková, Vlasta – Fuchs, Petr: *Matematika 1 (Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika)*, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, Brno 2014. http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/vystupy.php
- Schwarz, Rudolf: *BA002 (BAA002) – Matematika 2 (Environmentálně vyspělé budovy)*, Materiály z matematiky a deskriptivní geometrie pro samostatné studium, Fakulta stavební VUT, Brno. http://rschwarz.wz.cz/fast/Mat2/BA002.htm

Integrace racionálních lomených funkcí

(i) Každou racionální neryze lomenou funkci $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde P_n a Q_n jsou polynomy stupně n a m, $n \geq m$, umíme dělením převést na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce, tj.

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)},$$

kde S_{n-m} a T_k jsou polynomy stupně $(n-m)$ a k, kde $k < m$.

(ii) Dále každou racionální ryze lomenou funkci umíme rozložit na součet parciálních zlomků.

(iii) K zintegrování libovolné racionální lomené funkce nám stačí umět počítat následující 4 typy integrálů z parciálních zlomků:

1. $\displaystyle\int \frac{A}{ax+b}\,\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}$,
3. $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$,
4. $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}$,

kde A, B, C, a, b, c jsou reálná čísla a $D = b^2 - 4ac < 0$.

1. a 2. typ řešíme buď substitucí $ax+b=t$, která převede tento typ na tabulkové integrály $\int t^{-1}\,\mathrm{d}t$, $\int t^{-n}\,\mathrm{d}t$ nebo pomocí vzorečků

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \quad a \quad \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

Příklad 2.1

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{3}{2x-8}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 2.2.1

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{3}{(2x-8)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 2.2.2

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{(3x+4)^5}\,\mathrm{d}x.$$

3. typ řešíme převedením na součet integrálu typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ a integrálu typu $\int \frac{D}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$, kde druhý integrál po doplnění jmenovatele na čtverec řešíme vzorcem $\int \frac{1}{x^2+A^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + c.$

Příklad 2.3.1

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{x}{x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 2.3.2

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2x+1}{9x^2+6x+5}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 2.3.3

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka

3. typ, kde ale $D = b^2 - 4ac \geq 0$, řešíme buď rozložením na součet dvou parciálních zlomků 1. typu a dointegrováním nebo můžeme použít i vzorec

$$\int \frac{1}{x^2-A^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{x-A}{x+A}\right| + c.$$

Příklad 2.4

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{3}{2x^2-12x+10}\,\mathrm{d}x.$$

4. typ se řeší podobně jako 3. typ – nejprve integrand upravíme na součet integrálu typu $\int \frac{f'(x)}{(f(x))^n}\,\mathrm{d}x$ a integrálu typu $\int \frac{D}{(ax^2+bx+c)^n}\,\mathrm{d}x$, kde druhý integrál po doplnění jmenovatele na čtverec $\int \frac{1}{(x^2+A^2)^n}\mathrm{d}x$ řešíme pomocí rekurentní formule.

$$\int \frac{f'(x)}{(f(x))^n}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(f(x))^{n-1}}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+A^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n-1)A^2}\left(\frac{x}{(x^2+A^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{1}{(x^2+A^2)^{n-1}}\right)$$

Příklad 2.5.1

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{2x+3}{(4x^2-4x+3)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 2.5.2

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{4x-1}{(x^2+4x+13)^2}\,\mathrm{d}x.$$

- ✓ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- ✓ $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,
- ✓ $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$,
- ✓ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,
- ✓ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
- ✓ $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$,
- ✓ $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

Polynom n proměnných

$$P(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \ldots u_n^{k_n},$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{k_1 k_2 \ldots k_n} \in \mathbb{R}$, k_1, m_i jsou celá nezáporná čísla

Racionální funkce n proměnných

$$R(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{P(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{Q(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$$

Typ $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$

Nechť
$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$$
je racionální funkce dvou proměnných $u = \sin x$ a $v = \cos x$. Integraci funkcí tohoto typu lze převést na integraci funkcí racionálních v proměnné t zavedením následujících substitucí:

(i) Platí-li $R(-u,v) = -R(u,v)$, integrant je lichá funkce vůči proměnné $\sin x$, pak volíme substituci
$$t = \cos x.$$

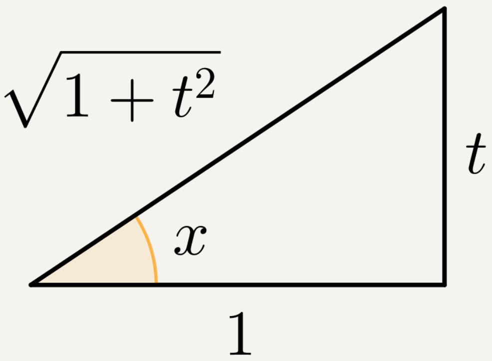
Integrace goniometrických funkcí

(ii) Platí-li $R(u,-v) = -R(u,v)$, integrant je lichá funkce vůči proměnné $\cos x$, pak volíme substituci
$$t = \sin x.$$

(iii) Platí-li $R(-u,-v) = R(u,v)$, integrant je sudá funkce vůči proměnné $\sin x$ a $\cos x$ současně, pak volíme substituci
$$t = \operatorname{tg} x.$$

(iv) V ostatních případech lze volit univerzální substituci
$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Substituce $t = \operatorname{tg} x$



$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$
$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$
$$\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Odvození:

$$t = \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka

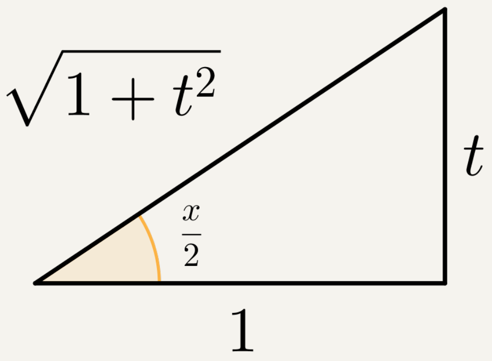
Je-li integrant sudá funkce vůči proměnné $\sin x$ *a* $\cos x$ *současně, volíme substituci* $t = \operatorname{tg} x$. *Ta ovšem, podobně jako univerzální substituce* $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, *vede na složité úpravy a výpočty integrálů z racionálně lomené funkce. Proto se v praxi, zvláště pokud jsou v integrantu pouze součiny či podíly sinů a kosinů v sudých mocninách, používají nejprve vzorce*

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad a \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

které převedou integrant na výraz se siny a kosiny v nižších, nejlépe lichých, mocninách s násobným argumentem. Poté již lze zpravidla buď volit jednodušší substituci za sinus či kosinus, nebo dopočítat integrál přímo.

Integrace goniometrických funkcí

Univerzální substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$



$$\sin \frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$
$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Integrace goniometrických funkcí

Odvození:

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 2.6

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\cos^3 x}{1 + 4\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 2.7

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 7\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 2.8

Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{4 - 5\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Typ $\int \sin\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x$, $\int \sin\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x$, $\int \cos\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x$

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. K výpočtu integrálů

$$\int \sin\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x \qquad \int \sin\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x \qquad \int \cos\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x$$

použijeme vzorce

$$\begin{aligned}
\sin\alpha x\sin\beta x &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x],\\
\cos\alpha x\cos\beta x &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x],\\
\sin\alpha x\cos\beta x &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x].
\end{aligned}$$

Typ $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

Nechť m, n jsou celá nezáporná a sudá čísla. Pro výpočet integrálu

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

použijeme výše uvedené vzorce

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x. \end{aligned}$$

Příklad 2.9

Vypočtěte integrál

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx.$$

Příklad 2.10

Vypočtěte integrál

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx.$$

Děkuji za pozornost!