Kolmá axonometrie

Řezy těles, průsečíky přímky s tělesem

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

- Autorský kolektiv Ústavu matematiky a deskriptivní geometrie FaSt VUT v Brně: *Deskriptivní geometrie, verze 4.0 pro I. ročník Stavební fakulty Vysokého učení technického v Brně*, Soubor CD-ROMů Deskriptivní geometrie, Fakulta stavební VUT v Brně, 2012. ISBN 978-80-7204-626-3.

Základní literatura

- Autorský kolektiv Ústavu matematiky a deskriptivní geometrie FaSt VUT v Brně: *Sbírka řešených příkladů z konstruktivní geometrie*, Fakulta stavební VUT v Brně, 2021.

https://www.geogebra.org/m/ejhn4jay

Postup řešení:

Postup řešení:

- Najdeme jeden bod řezu – průsečík jedné z bočních hran hranolu / jehlanu nebo osy válce s rovinou řezu.

Řezy těles – hranol, jehlan a válec

Postup řešení:

- Najdeme jeden bod řezu – průsečík jedné z bočních hran hranolu / jehlanu nebo osy válce s rovinou řezu.
- Určíme osu afinity / kolineace mezi řezem a dolní podstavou – průsečnice roviny řezu s rovinou dolní podstavy.

Postup řešení:

- Najdeme jeden bod řezu – průsečík jedné z bočních hran hranolu / jehlanu nebo osy válce s rovinou řezu.
- Určíme osu afinity / kolineace mezi řezem a dolní podstavou – průsečnice roviny řezu s rovinou dolní podstavy.
- Další body řezu na hranách určíme afinitou / kolineací.

Postup řešení:

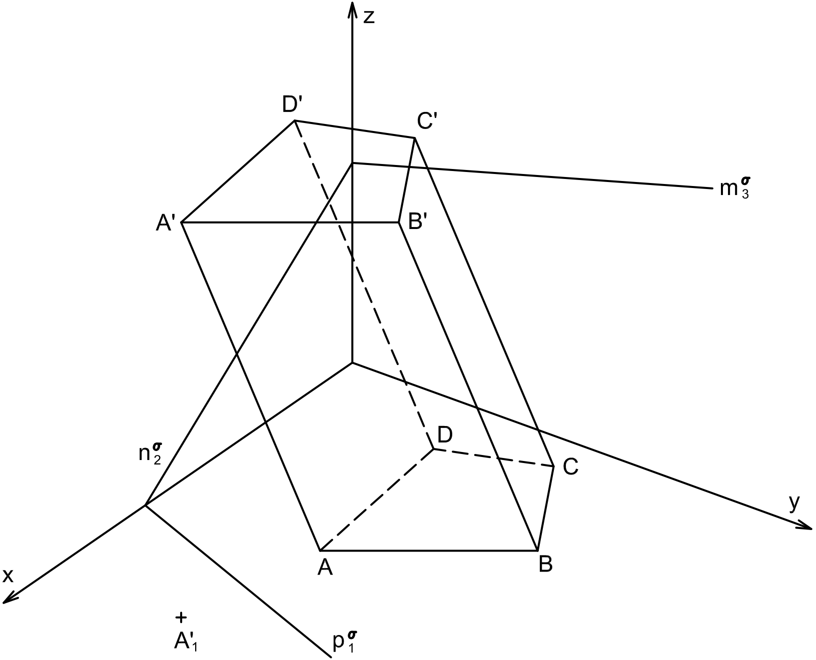
- Najdeme jeden bod řezu – průsečík jedné z bočních hran hranolu / jehlanu nebo osy válce s rovinou řezu.
- Určíme osu afinity / kolineace mezi řezem a dolní podstavou – průsečnice roviny řezu s rovinou dolní podstavy.
- Další body řezu na hranách určíme afinitou / kolineací.
- Určíme viditelnost řezu.

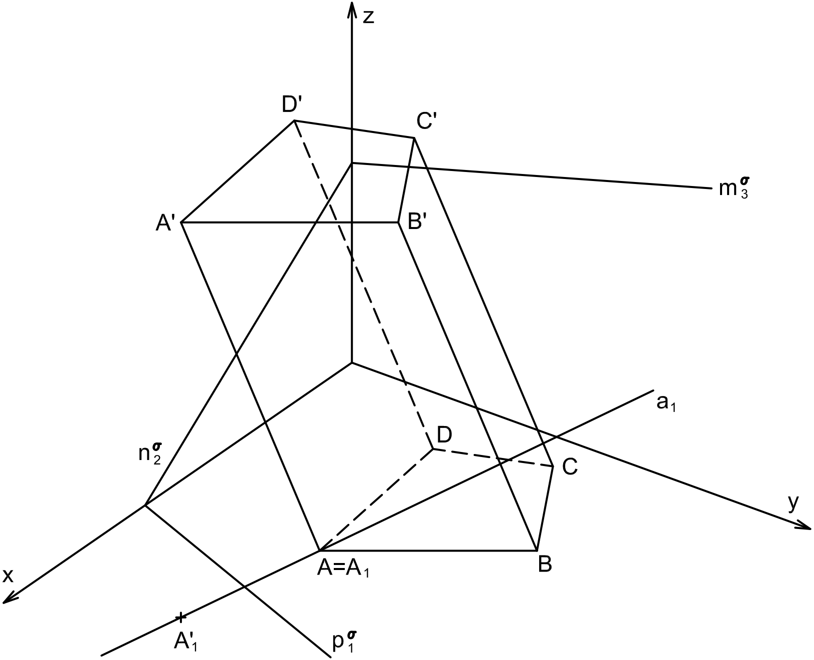
Příklad (Řez šikmého hranolu)

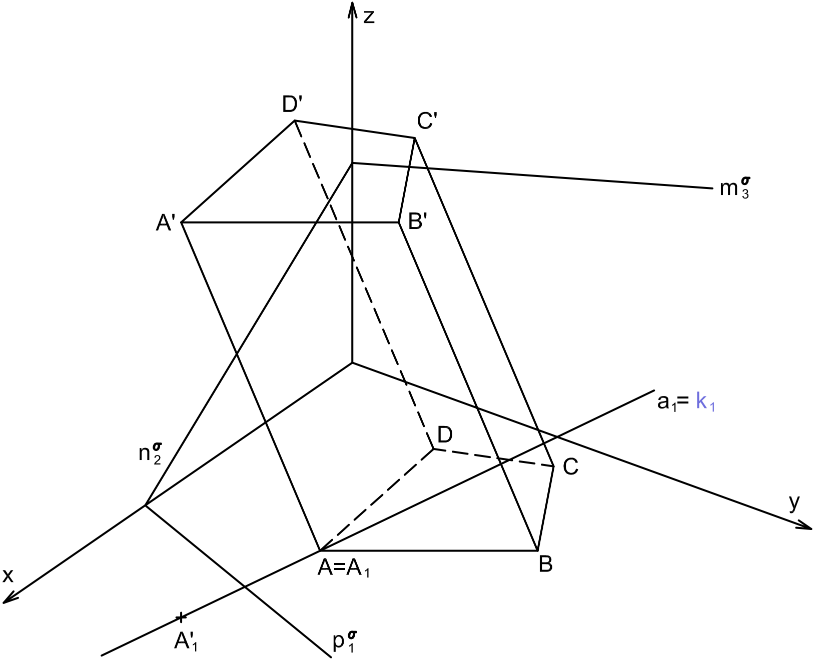
Sestrojte řez šikmého čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ rovinou σ. Hranol má podstavu $ABCD$ v půdorysně, horní podstava $A'B'C'D'$ je rovnoběžná s půdorysnou. Rovina σ je dána stopami.

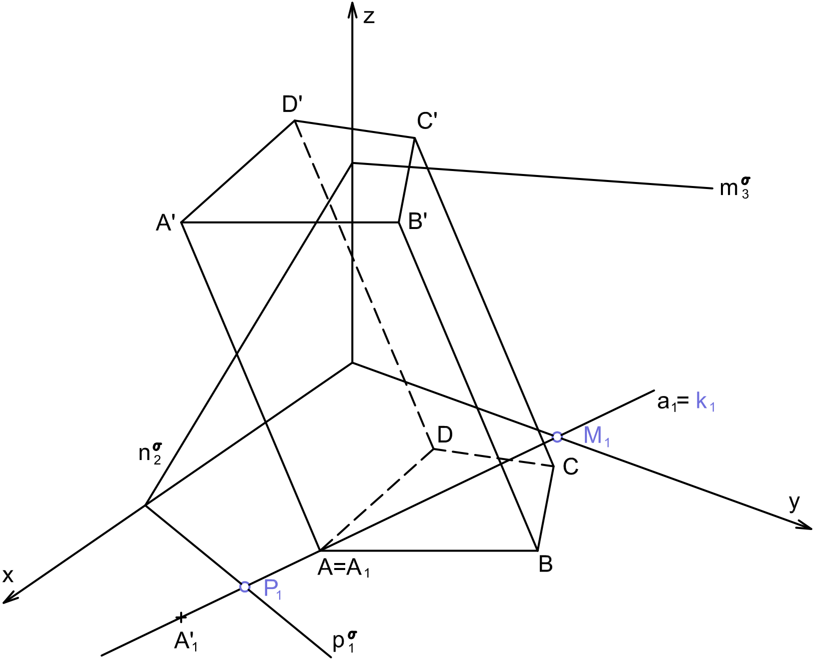
Řešení

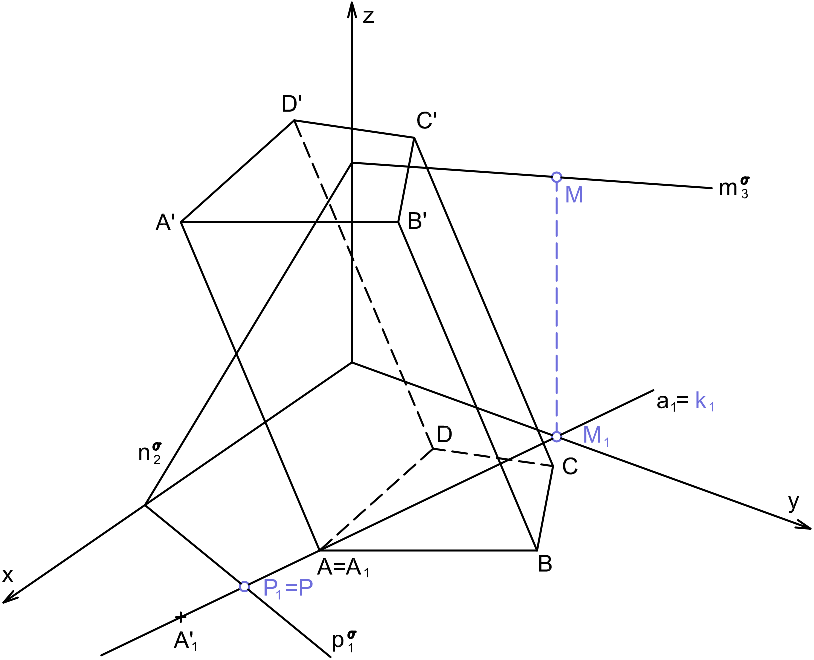
1. První bod řezu sestrojíme jako průsečík jedné boční hrany (AA') s rovinou σ, řešíme metodou krycí přímky.
2. Sestrojíme řez pomocí afinity mezi rovinou podstavy a rovinou řezu. Osou afinity je půdorysná stopa roviny σ, pár odpovídajících si bodů je A, $\bar{A}$.

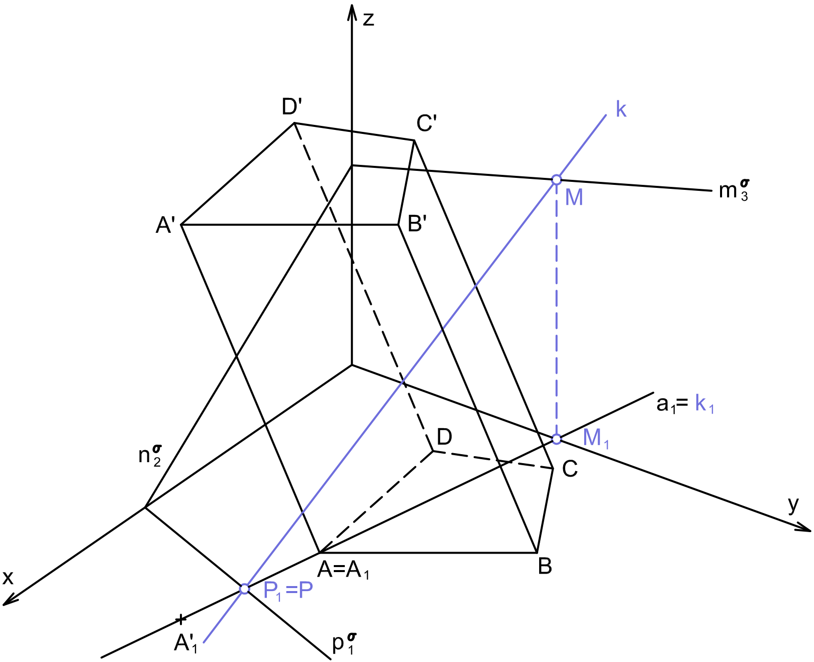

z
D'
C'
m_3^σ
A'
B'
D
n_2^σ
C
y
A
B
x
A'_1
p_1^σ

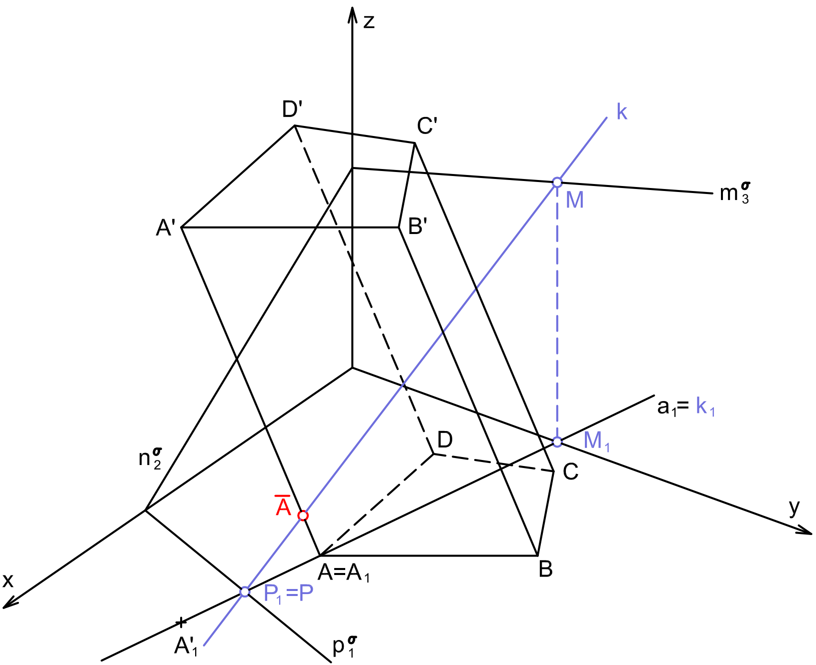

z
D'
C'
m_3^σ
A'
B'
a_1
D
n_2^σ
C
y
x
A=A$_1$
B
A'$_1$
p_1^σ

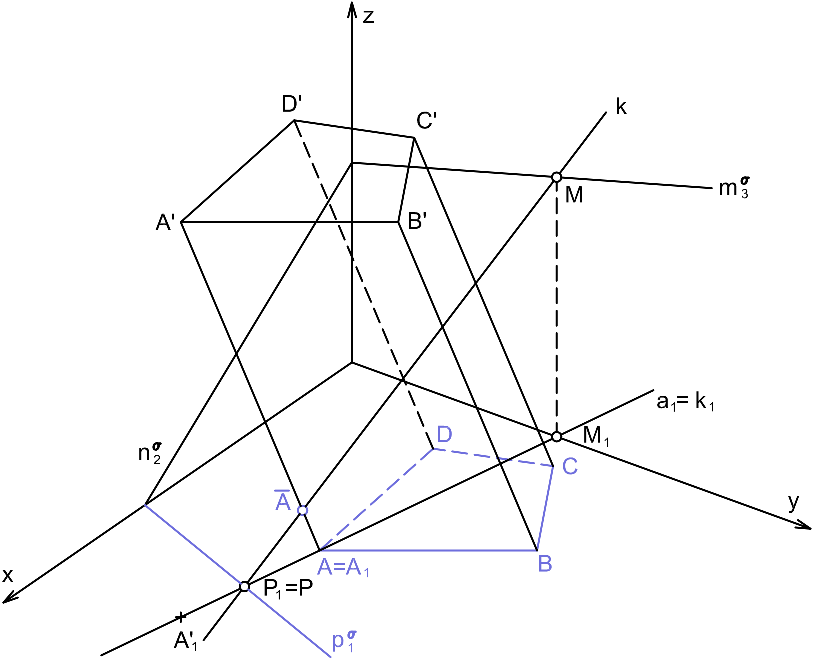

z
D'
C'
m_3^σ
A'
B'
a_1= k_1
D
n_2^σ
C
y
x
A=A_1
B
A'_1
p_1^σ

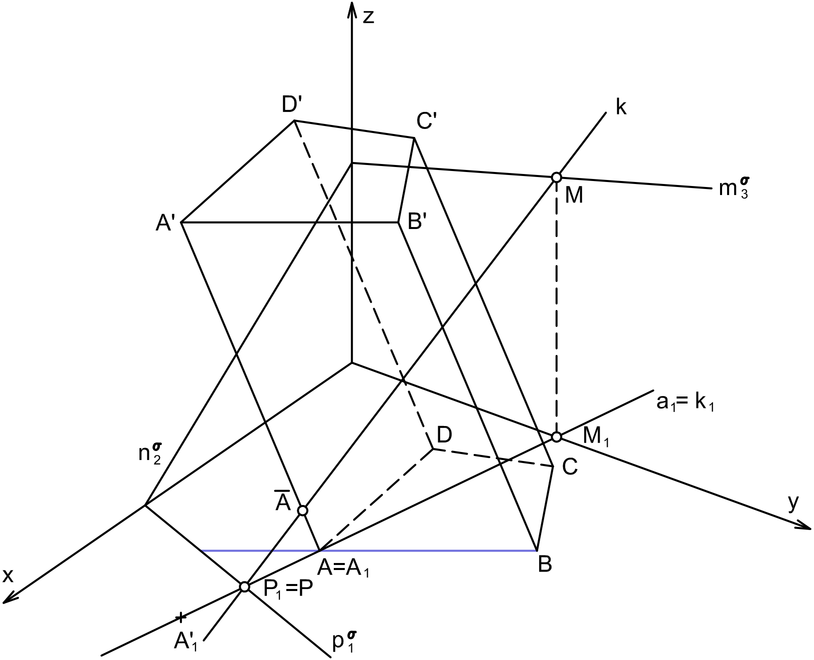

z
D'
C'
m_3^σ
A'
B'
$a_1 = k_1$
D
M_1
n_2^σ
C
y
x
A=A_1
B
P_1
A'_1
p_1^σ

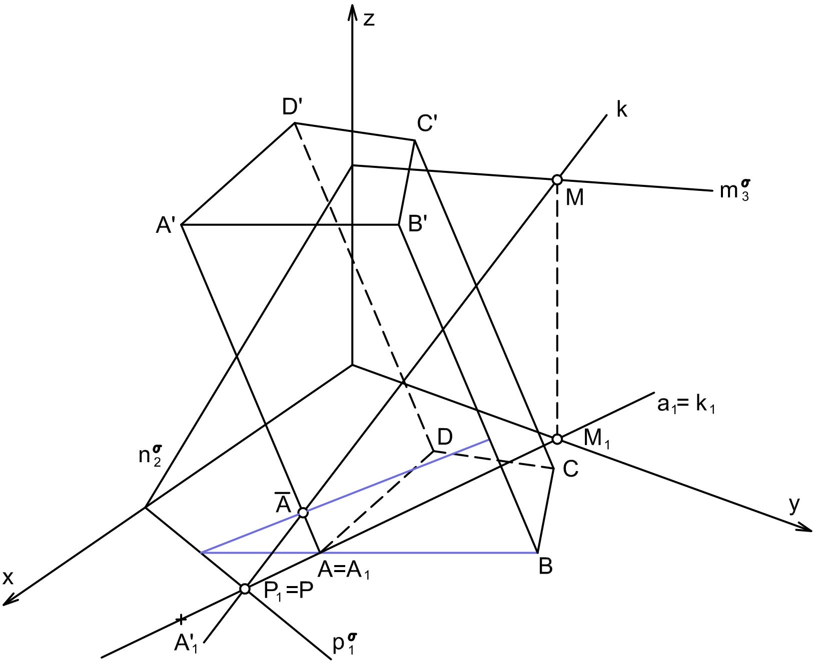

z
D'
C'
M
m_3^σ
A'
B'
$a_1 = k_1$
D
M_1
n_2^σ
C
y
x
$A = A_1$
B
$P_1 = P$
A'_1
p_1^σ

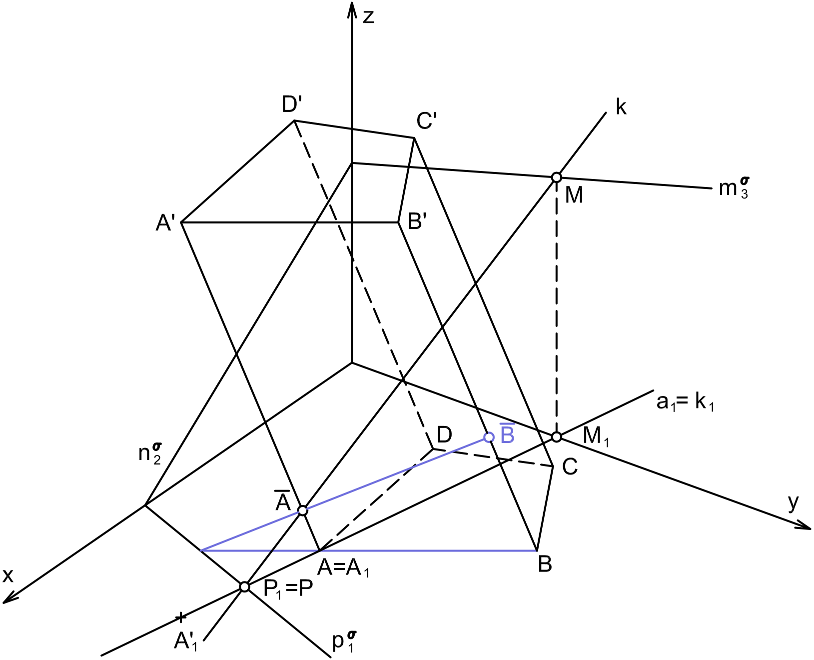

z
D'
C'
k
M
m_3^σ
A'
B'
$a_1 = k_1$
D
M_1
n_2^σ
C
y
x
$A = A_1$
B
$P_1 = P$
A'_1
p_1^σ

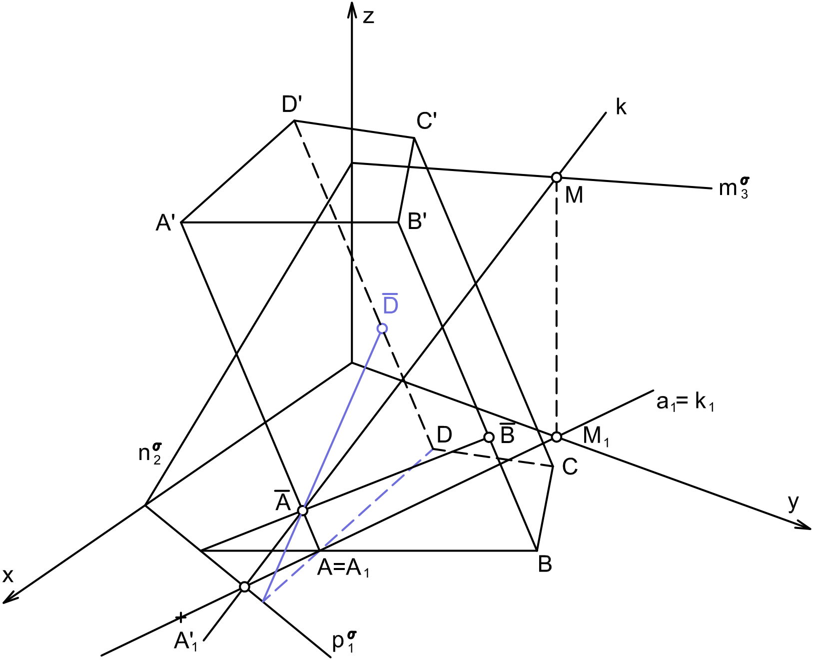

z
D'
C'
k
M
m
A'
B'
a1= k1
D
M1
n
C
y
A
B
A=A1
x
P1 =P
A'1
p

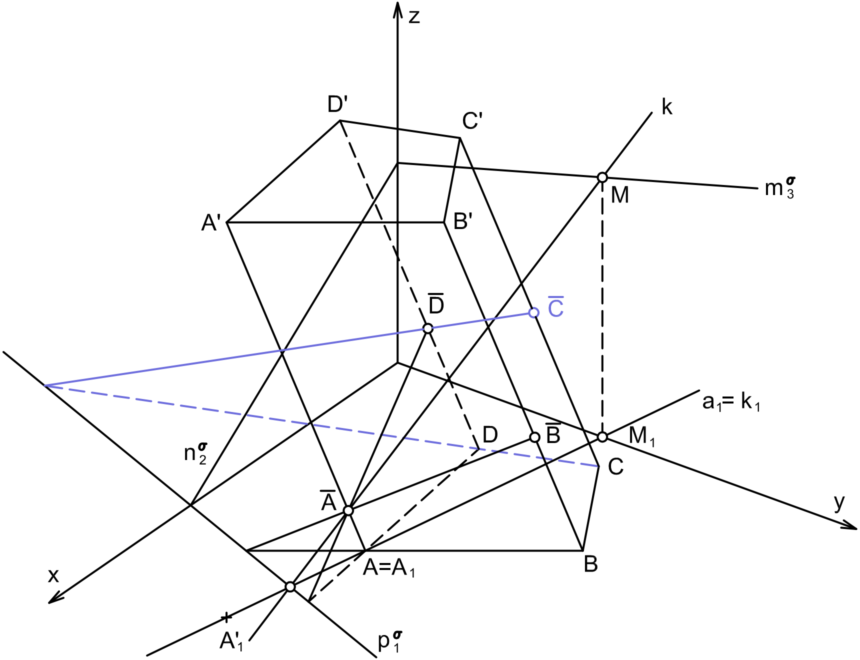

z
D'
C'
k
M
m_3^σ
A'
B'
$a_1 = k_1$
D
M_1
n_2^σ
C
$\overline{A}$
y
x
$A=A_1$
B
$P_1=P$
A'_1
p_1^σ

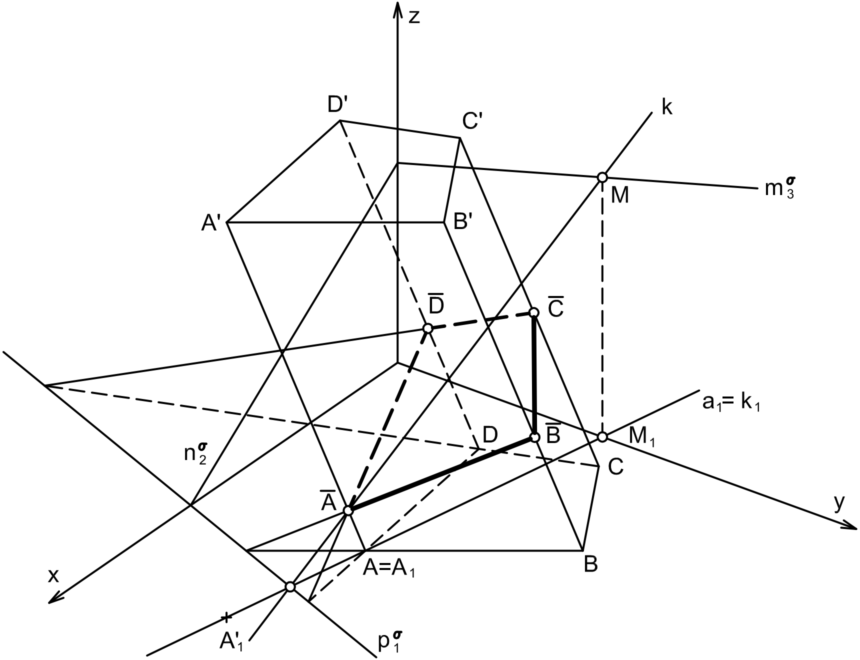

z
D'
C'
k
m_3^σ
M
A'
B'
$a_1 = k_1$
D
M_1
n_2^σ
C
y
$\overline{A}$
$A = A_1$
B
x
$P_1 = P$
A'_1
p_1^σ


z
D'
C'
k
M
m_3^σ
A'
B'
$a_1 = k_1$
D
M_1
n_2^σ
C
$\overline{A}$
y
x
A=A_1
B
P_1=P
A'_1
p_1^σ


z
D'
C'
k
M
m_3^σ
A'
B'
$a_1 = k_1$
D
$\overline{B}$
M_1
n_2^σ
C
$\overline{A}$
y
x
A=A_1
B
P_1=P
A'_1
p_1^σ


z
D'
C'
k
M
m_3^σ
A'
B'
$\overline{D}$
$a_1 = k_1$
D
$\overline{B}$
M_1
C
n_2^σ
$\overline{A}$
y
x
$A=A_1$
B
A'_1
p_1^σ


z
D'
C'
k
M
m_3^σ
A'
B'
$\overline{D}$
$\overline{C}$
$a_1 = k_1$
D
$\overline{B}$
M_1
C
n_2^σ
$\overline{A}$
y
$A=A_1$
B
x
A'_1
p_1^σ

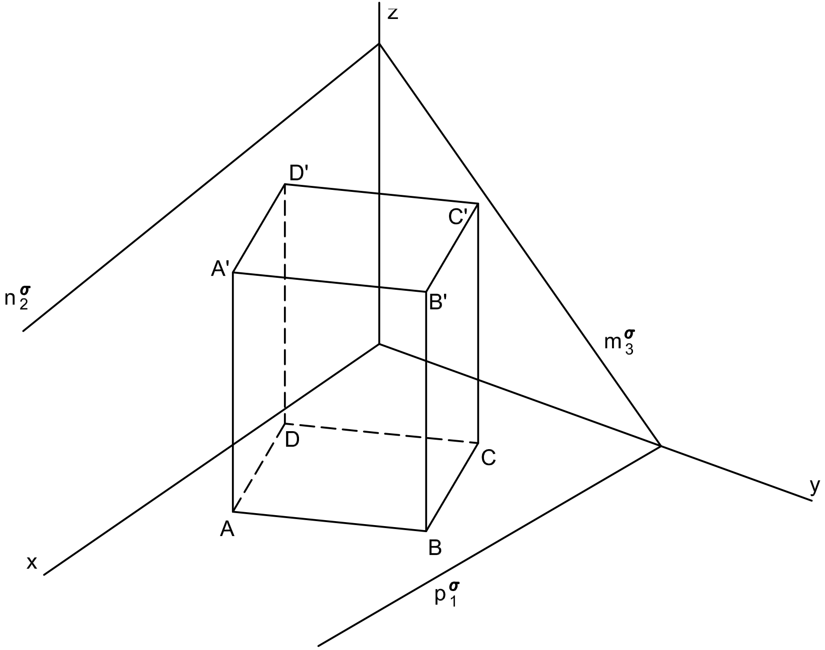

z
D'
C'
k
M
m_3^σ
A'
B'
$\overline{D}$
$\overline{C}$
$a_1 = k_1$
D
$\overline{B}$
M_1
C
n_2^σ
$\overline{A}$
y
x
$A = A_1$
B
A'_1
p_1^σ

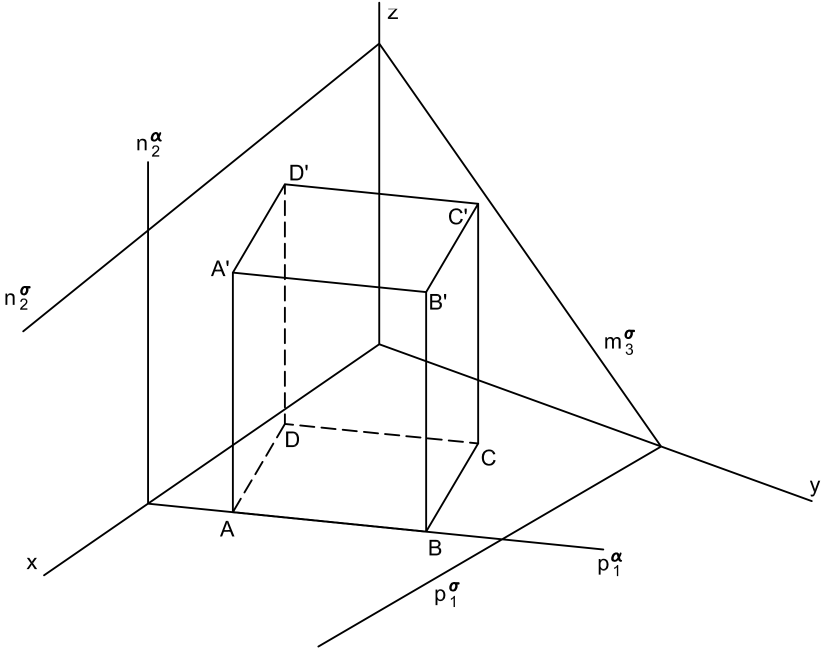
Příklad (Řez kolmého hranolu)

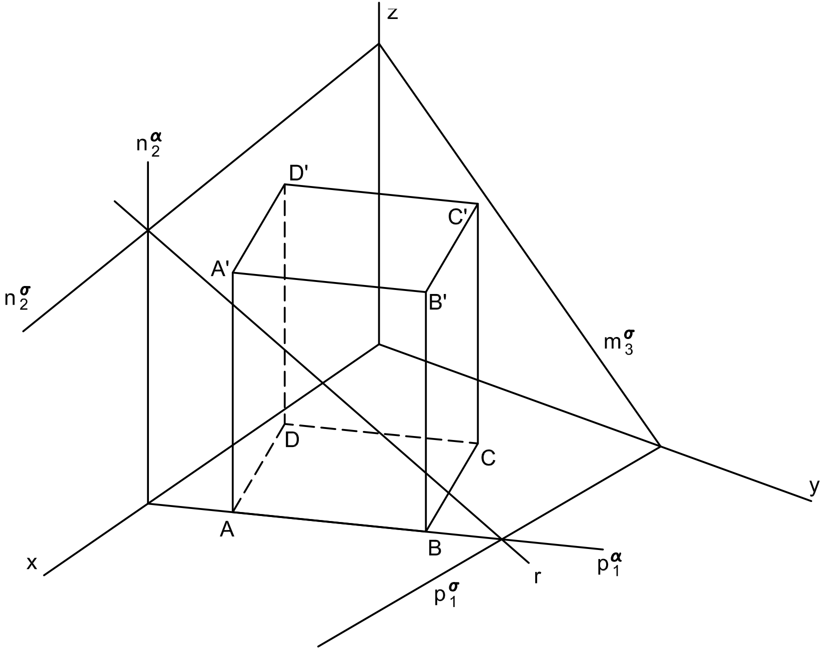
Je dán kolmý čtyřboký hranol s podstavou $ABCD$ v půdorysně a horní podstavou $A'B'C'D'$ rovnoběžnou s půdorysnou. Sestrojte těleso, které vznikne odřiznutím horní části hranolu rovinou σ.

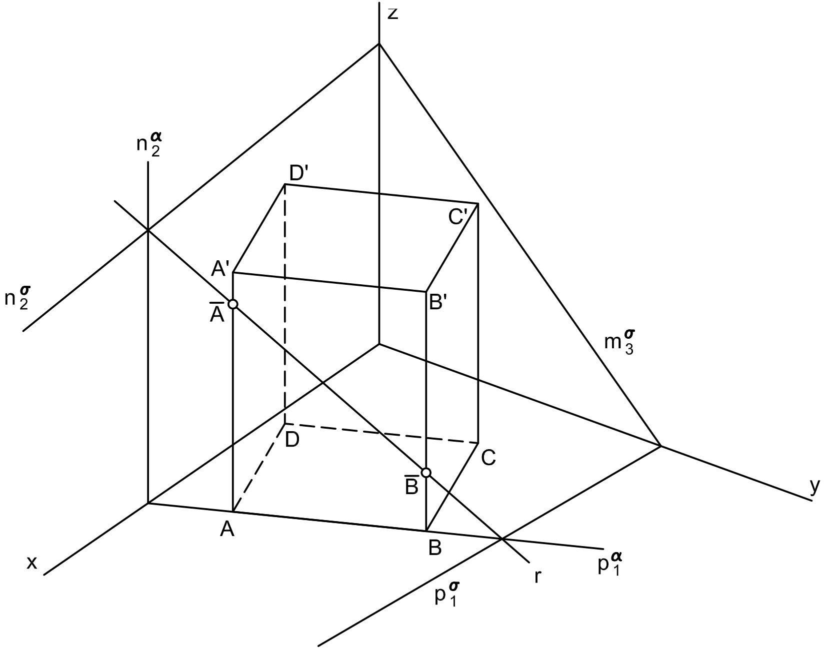
Řešení

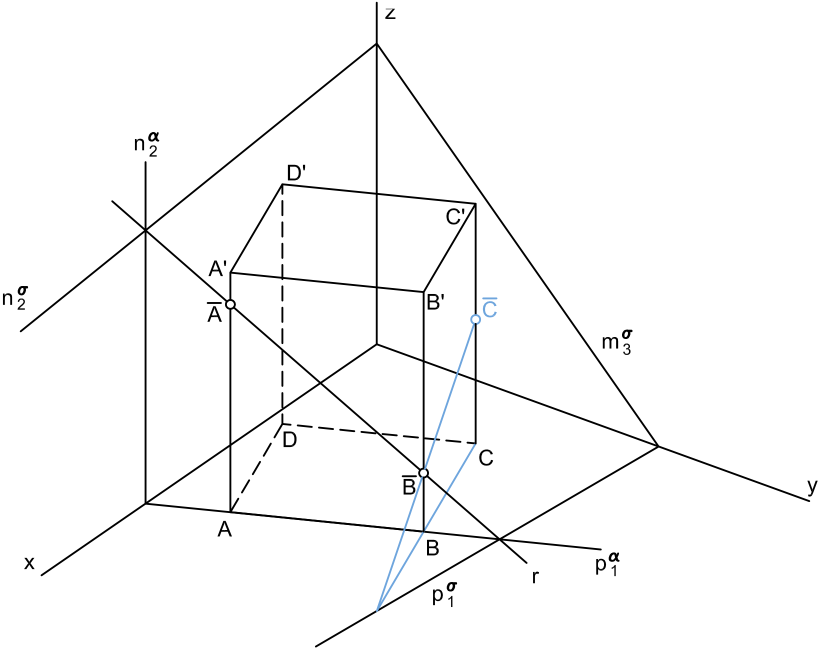
1. První část řezu najdeme ve stěně $ABA'B'$ jako průsečnici dvou rovin $\alpha = ABA'$ a σ. Získáme tak body řezu $\bar{A}$, $\bar{B}$.
2. Sestrojíme řez pomocí afinity mezi rovinou podstavy a rovinou řezu. Osou afinity je půdorysná stopa roviny σ, pár odpovídajících si bodů je A, $\bar{A}$.
3. Vyznačíme těleso, které vznikne odříznutím horní části hranolu.

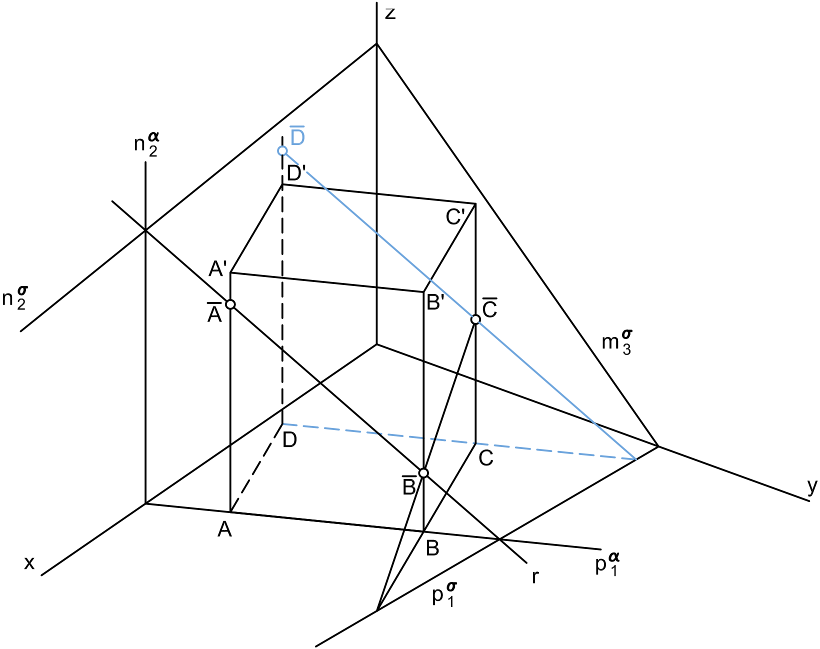

z
D'
C'
A'
B'
n_2^σ
m_3^σ
D
C
A
B
x
y
p_1^σ

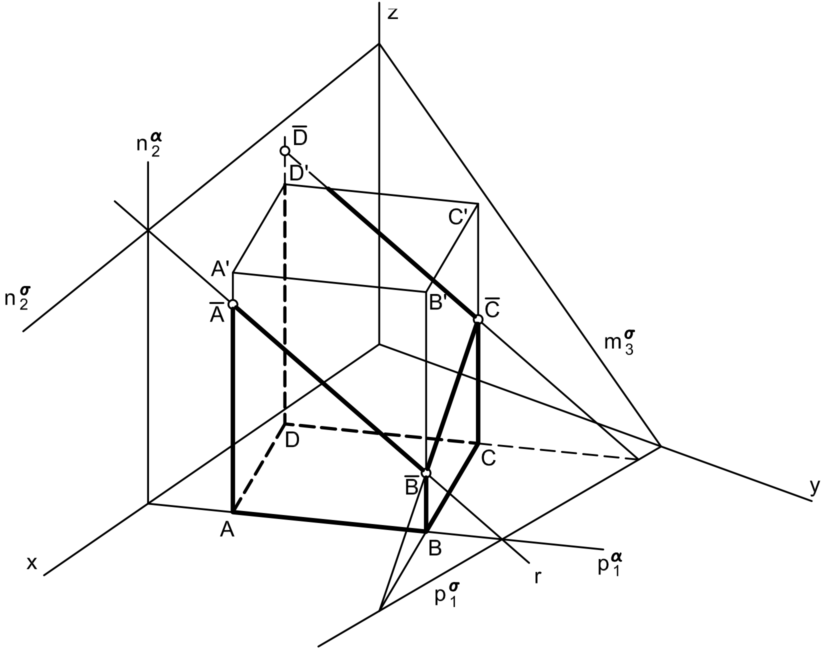

z
n_2^α
D'
C'
A'
n_2^σ
B'
m_3^σ
D
C
y
A
B
x
p_1^α
p_1^σ

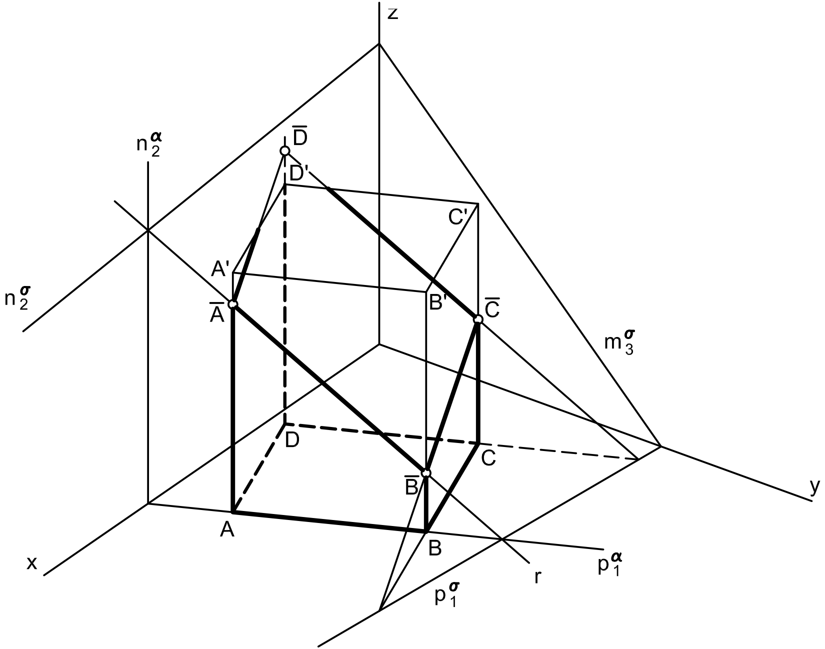

z
n_2^α
D'
C'
A'
n_2^σ
B'
m_3^σ
D
C
y
A
B
x
p_1^α
r
p_1^σ

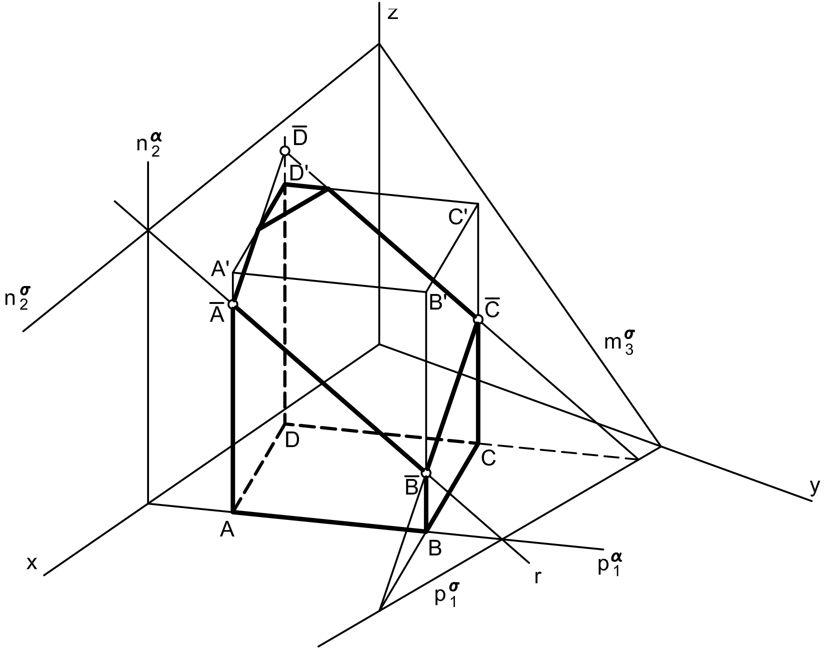

z
n_2^α
D'
C'
A'
n_2^σ
$\overline{A}$
B'
m_3^σ
D
C
$\overline{B}$
y
A
B
x
r
p_1^α
p_1^σ


z
n_2^{α}
D'
C'
A'
n_2^{σ}
$\overline{A}$
B'
$\overline{C}$
m_3^{σ}
D
C
$\overline{B}$
y
A
B
x
r
p_1^{α}
p_1^{σ}


z
n_2^α
$\overline{D}$
D'
C'
A'
n_2^σ
$\overline{A}$
B'
$\overline{C}$
m_3^σ
D
C
$\overline{B}$
y
A
B
x
p_1^α
r
p_1^σ


z
n α 2
D̄
D'
C'
A'
n σ 2
Ā
B'
C̄
m σ 3
D
C
B̄
y
A
B
x
r
p α 1
p σ 1


z
n_2^α
$\overline{D}$
D'
C'
A'
n_2^σ
$\overline{A}$
B'
$\overline{C}$
m_3^σ
D
C
y
$\overline{B}$
A
B
x
r
p_1^α
p_1^σ

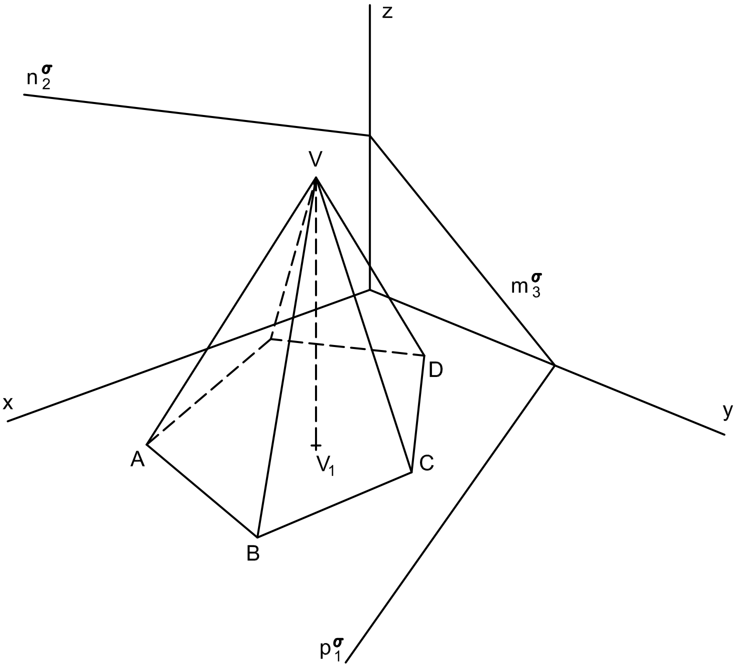

z
n$_2^\alpha$
D̄
D'
C'
A'
n$_2^\sigma$
Ā
B'
C̄
m$_3^\sigma$
D
C
B̄
y
A
B
x
r
p$_1^\alpha$
p$_1^\sigma$

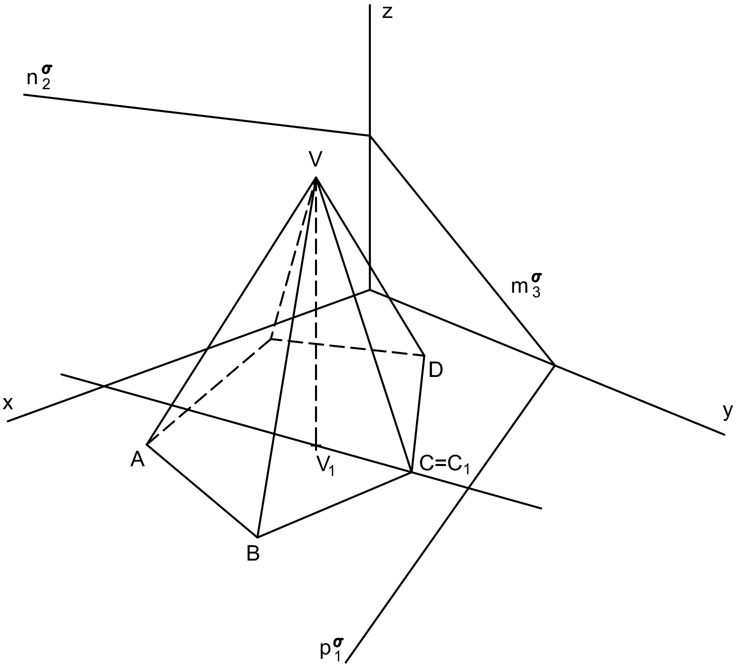
Příklad (Řez jehlanu)

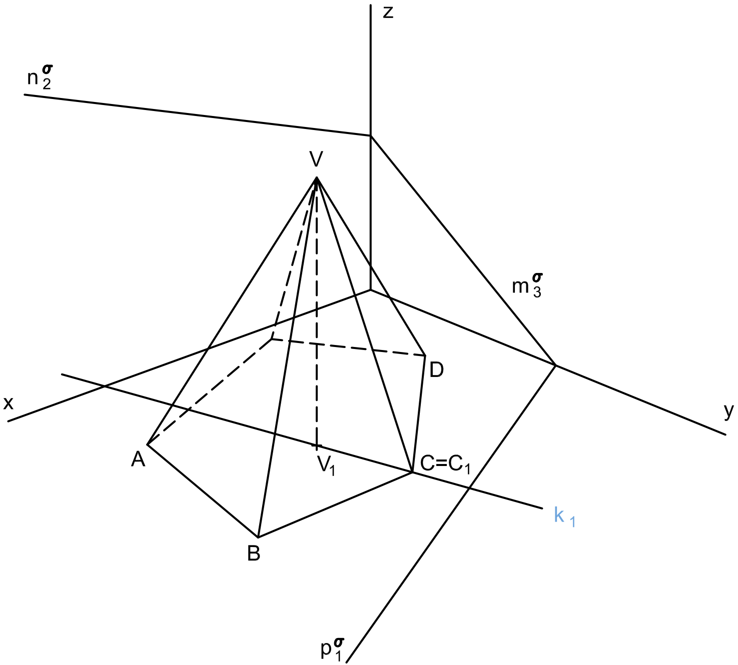
Sestrojte řez pětibokého jehlanu $ABCDEV$ rovinou σ. Podstava jehlanu $ABCDE$ leží v půdorysně, rovina σ je dána stopami

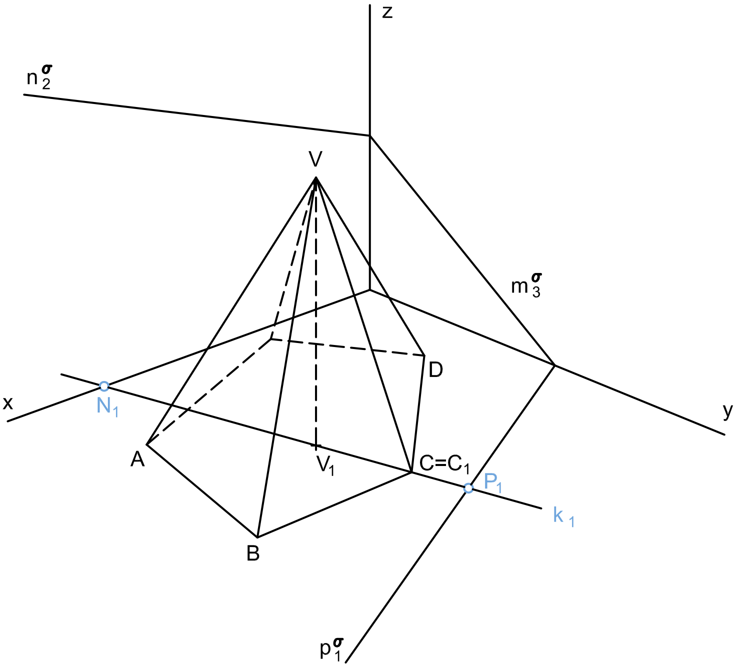
Řešení

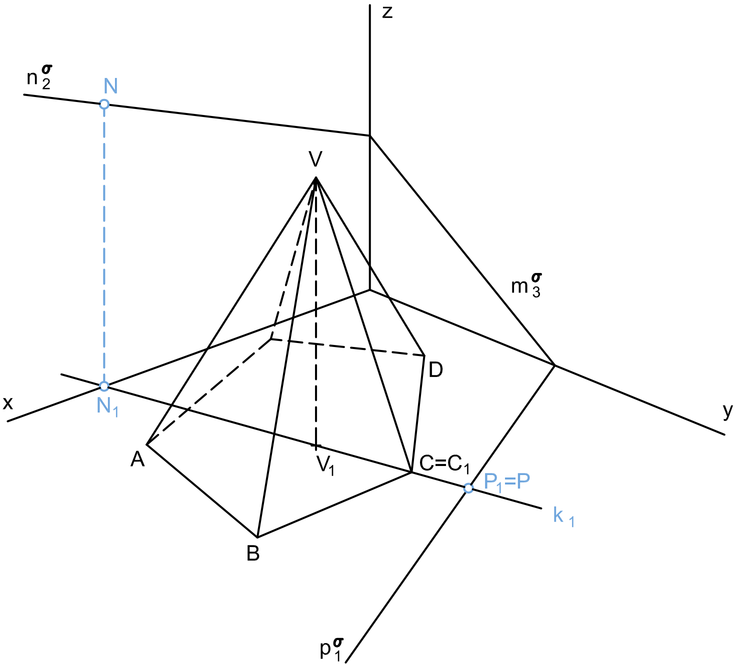
1. První bod řezu sestrojíme jako průsečík jedné boční hrany (CV) s rovinou σ, řešíme metodou krycí přímky.
2. Sestrojíme řez pomocí středové kolineace mezi rovinou podstavy a rovinou řezu. Osou kolineace je půdorysná stopa roviny σ, střed kolineace je bod V a pár odpovídajících si bodů je $C, \bar{C}$.

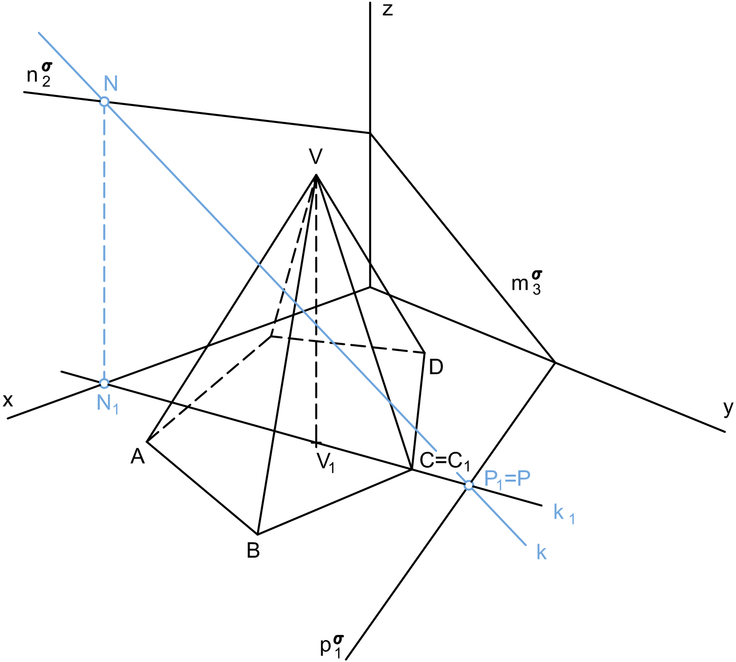

z
n_2^σ
V
m_3^σ
D
x
y
A
V_1
C
B
p_1^σ

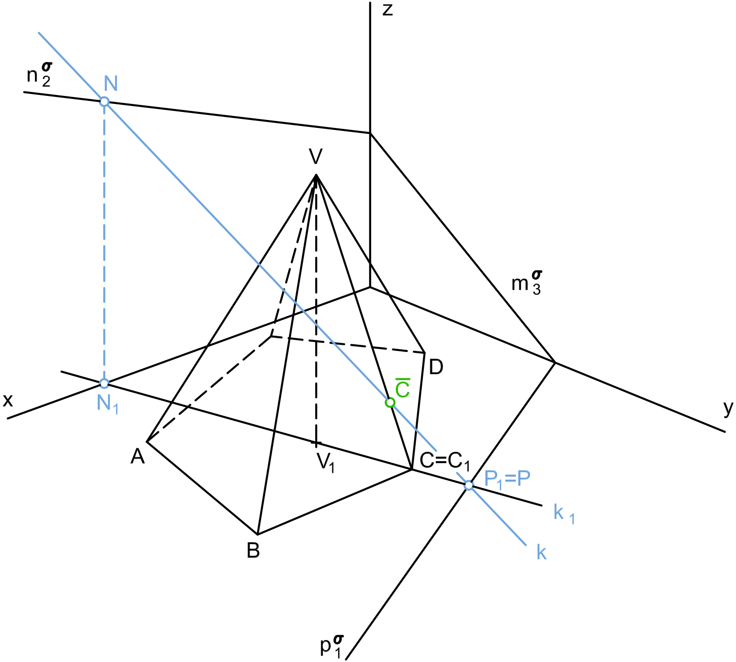

z
n_2^σ
V
m_3^σ
D
x
y
A
V_1
$C=C_1$
B
p_1^σ

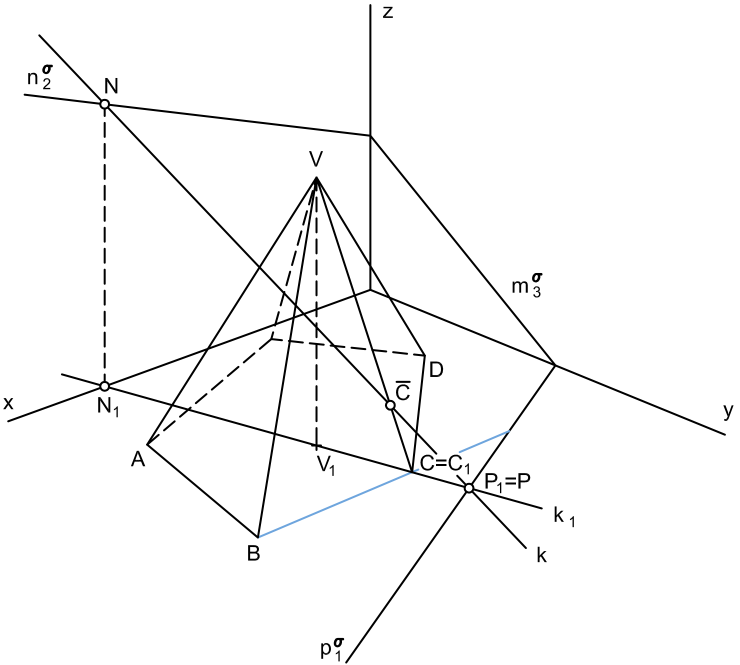

z
n_2^σ
V
m_3^σ
D
x
y
A
V_1
$C=C_1$
k_1
B
p_1^σ

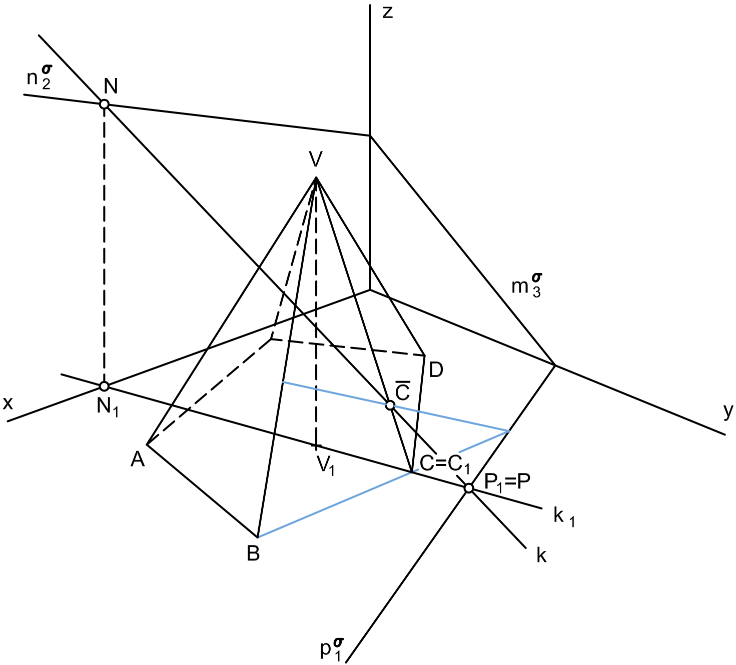

z
n_2^σ
V
m_3^σ
D
x
N_1
y
A
V_1
$C=C_1$
P_1
k_1
B
p_1^σ

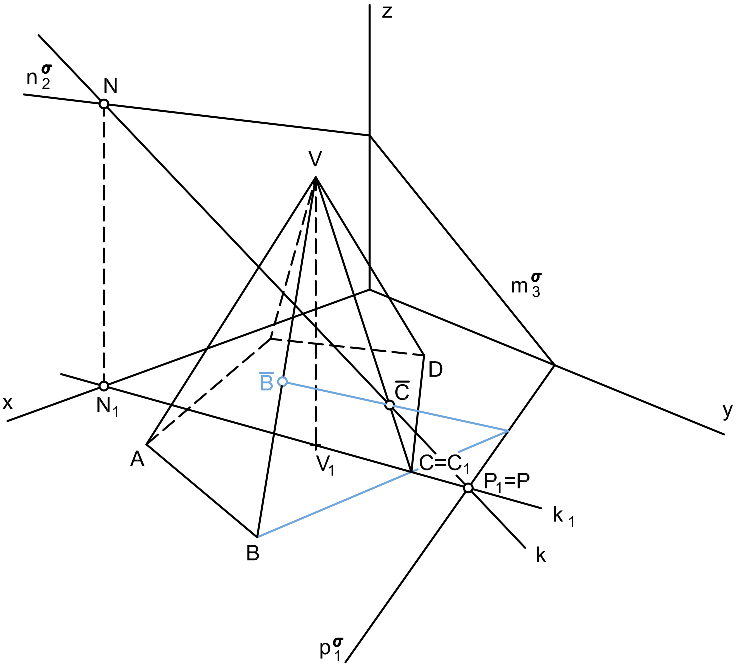

z
n_2^σ
N
V
m_3^σ
D
x
N_1
y
A
V_1
$C=C_1$
$P_1=P$
k_1
B
p_1^σ

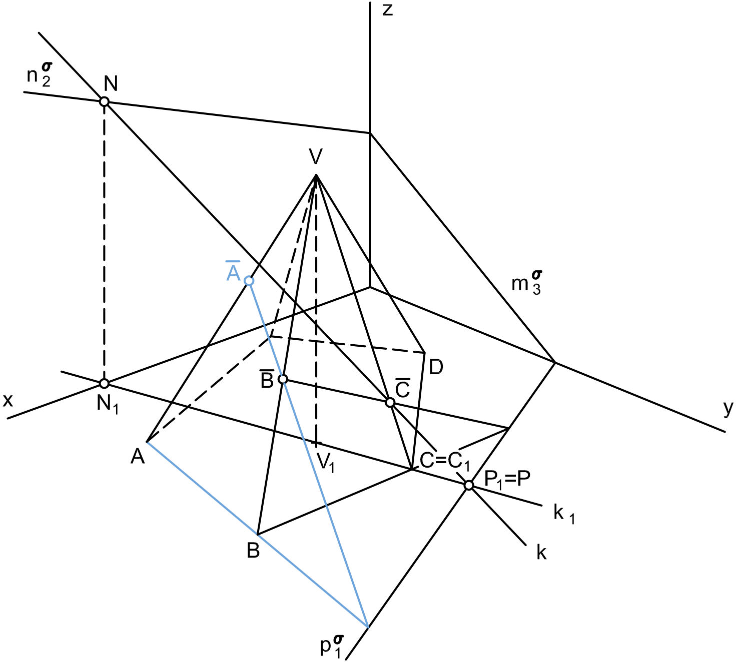

z
n_2^σ
N
V
m_3^σ
D
x
N_1
y
A
V_1
$C=C_1$
$P_1=P$
k_1
B
k
p_1^σ

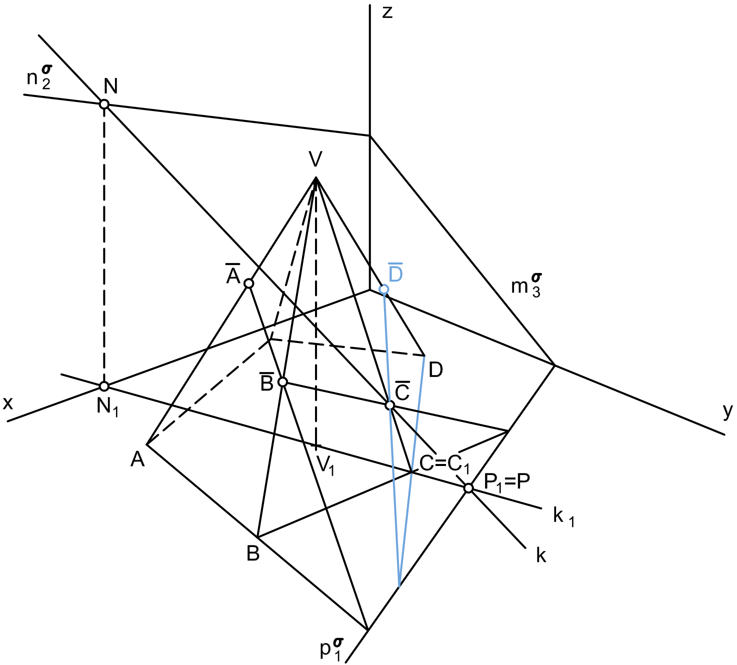

z
n$_2^\sigma$
N
V
m$_3^\sigma$
D
$\overline{C}$
x
N$_1$
y
A
V$_1$
C=C$_1$
P$_1$=P
k$_1$
B
k
p$_1^\sigma$

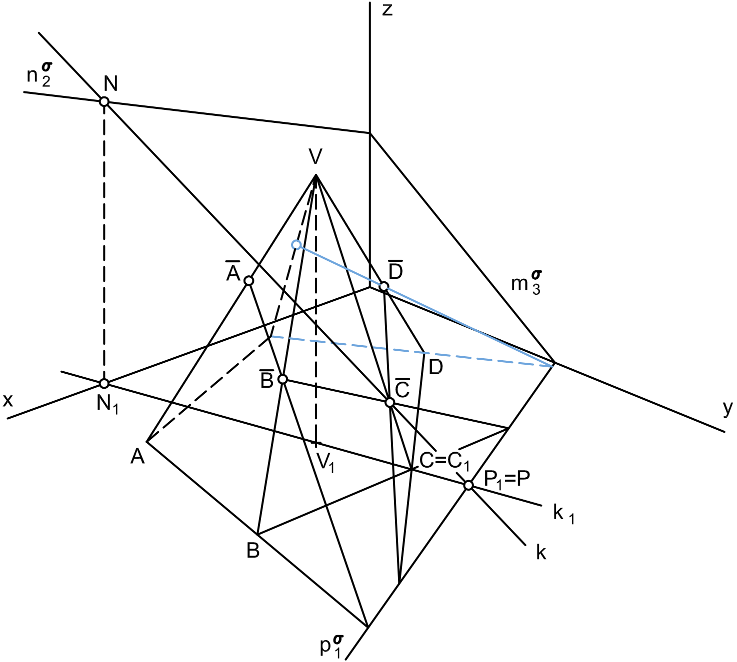

z
n
σ
2
N
V
m
σ
3
D
C
x
N
1
y
A
V
1
C=C
1
P
1
=P
k
1
B
k
p
σ
1

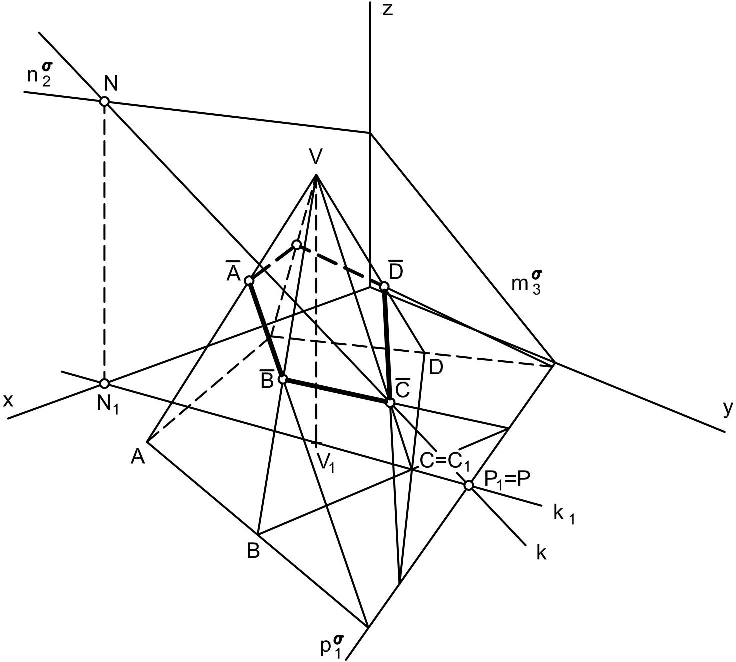

z
n_2^σ
N
V
m_3^σ
D
$\overline{C}$
x
N_1
y
A
V_1
$C=C_1$
$P_1=P$
k_1
B
k
p_1^σ


z
n
2
N
V
m
3
D
B
C
x
N
1
y
A
V
1
C=C
1
P
1
=P
k 1
B
k
p
1

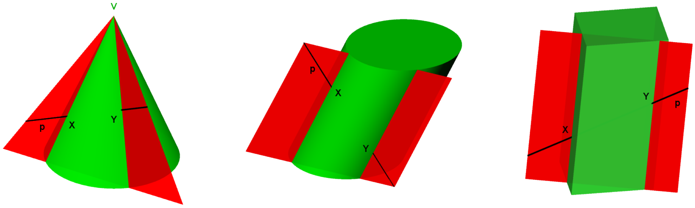

z
n_2^σ
N
V
$\overline{A}$
m_3^σ
D
$\overline{B}$
$\overline{C}$
x
N_1
y
A
V_1
$C=C_1$
$P_1=P$
k_1
B
k
p_1^σ


z
n_2^σ
N
V
$\bar{A}$
$\bar{D}$
m_3^σ
D
$\bar{B}$
$\bar{C}$
x
N_1
y
A
V_1
$C=C_1$
$P_1=P$
k_1
k
B
p_1^σ


z
n_2^σ
N
V
$\overline{A}$
$\overline{D}$
m_3^σ
D
$\overline{B}$
$\overline{C}$
x
N_1
y
A
V_1
$C=C_1$
$P_1=P$
k_1
k
B
p_1^σ

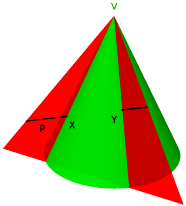

z
n_2^σ
N
V
$\overline{A}$
$\overline{D}$
m_3^σ
D
$\overline{B}$
$\overline{C}$
x
N_1
y
A
V_1
$C=C_1$
$P_1=P$
k_1
k
B
p_1^σ

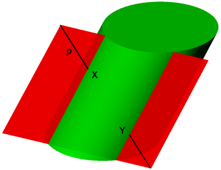
Postup řešení:

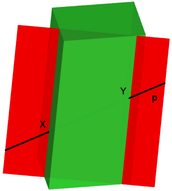


Průsečík přímky s tělesem

Postup řešení:



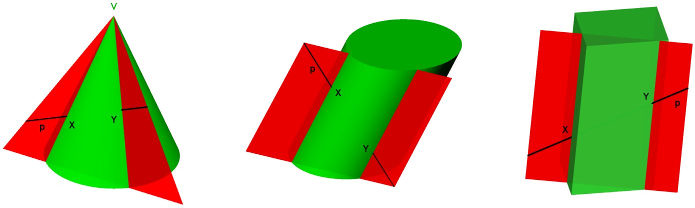




- Průsečík přímky p s kuželem a jehlanem určíme pomocí řezu vrcholovou rovinou, která prochází přímkou p a vrcholem kužele / jehlanu.

Průsečík přímky s tělesem

Postup řešení:



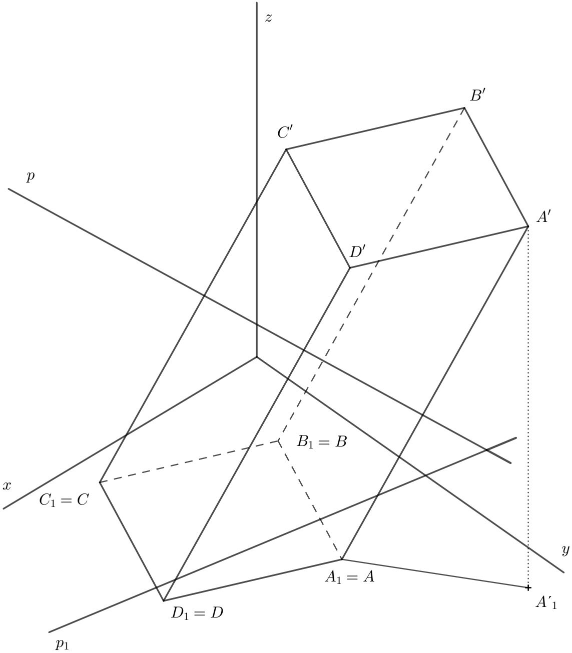
- Průsečík přímky p s kuželem a jehlanem určíme pomocí řezu vrcholovou rovinou, která prochází přímkou p a vrcholem kužele / jehlanu.
- Průsečík přímky p s válcem určíme pomocí řezu rovinou, která prochází přímkou p a je rovnoběžná s osou válce nebo je rovnoběžná s boční hranou hranolu.

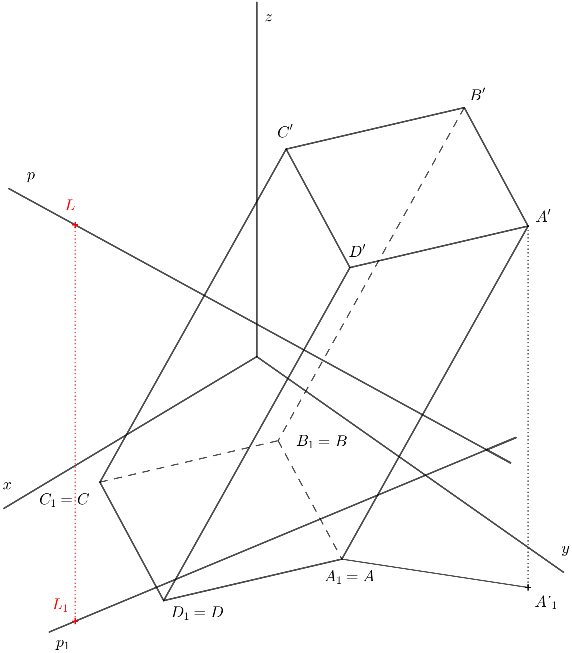
Příklad (Průsečík přímky s šikmým hranolem)

Určete průsečíky přímky p s daným šikmým hranolem, jehož podstava leží v půdorysně, určete viditelnost tělesa a přímky.

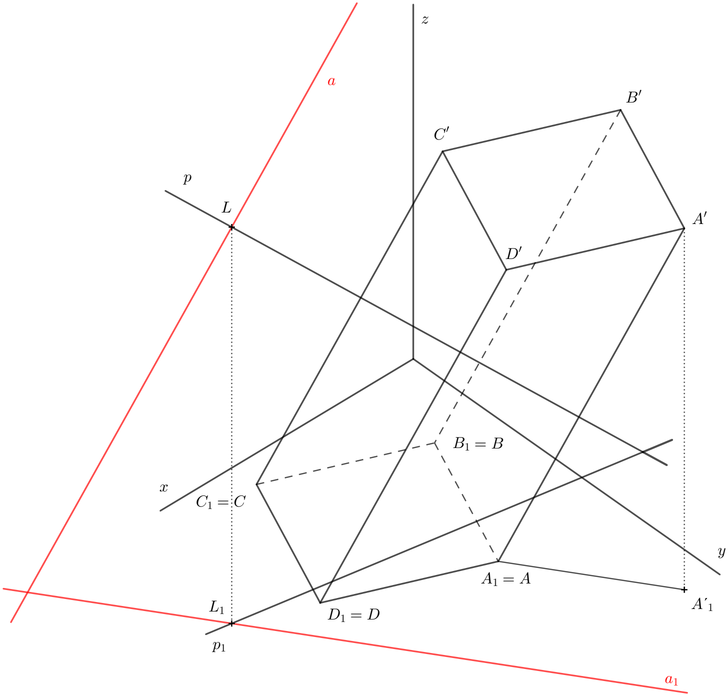
Řešení

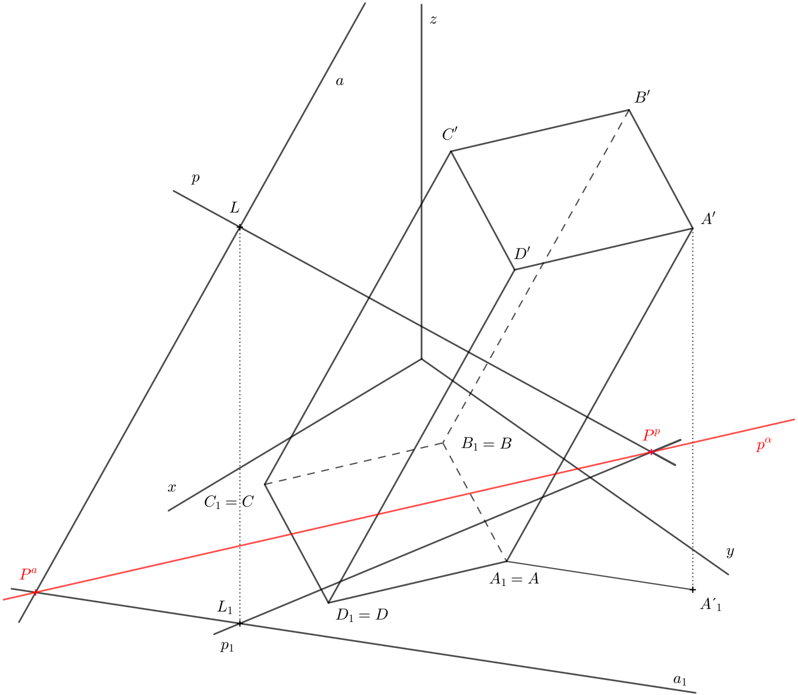
1. Přímkou p proložíme směrovou rovinu α, která je rovnoběžná se střednou AA' daného hranolu. Bodem L vedeme přímku a rovnoběžnou s AA' a sestrojíme její půdorysný stopník P^a, kterým pak prochází půdorysná stopa $p^\alpha = P^p P^a$ roviny α
2. Rovina α protíná daný hranol v rovnoběžníku, přímka p protíná rovnoběžník řezu v bodech T a U, které jsou současně hledanými průsečíky dané přímky p s pláštěm daného kosého hranolu.

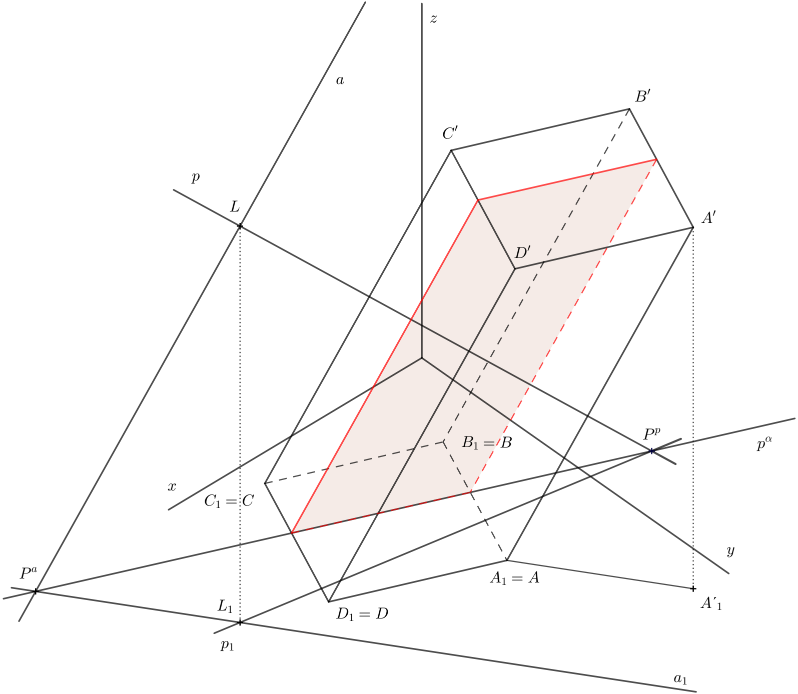

z
B'
C'
p
A'
D'
$B_1 = B$
x
$C_1 = C$
y
$A_1 = A$
A'_1
$D_1 = D$
p_1

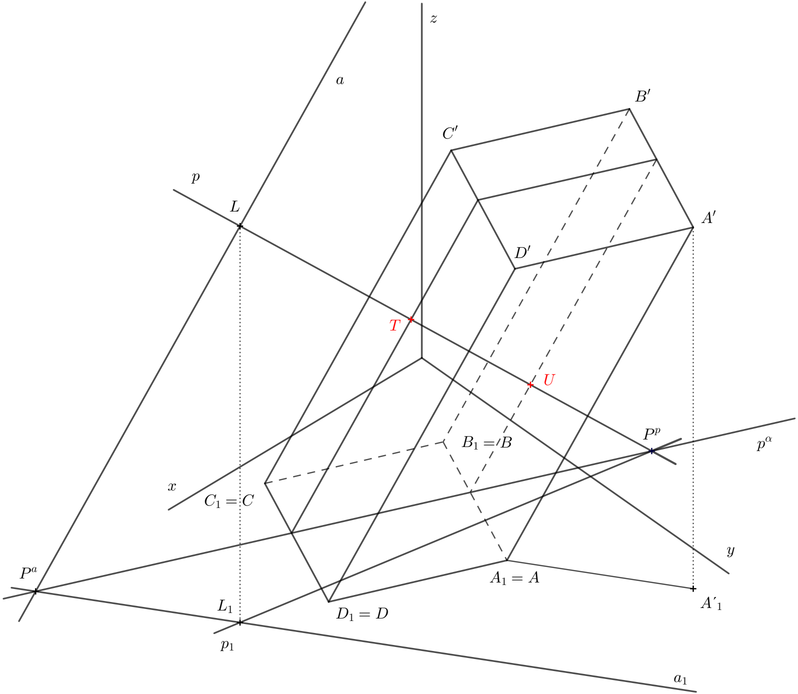


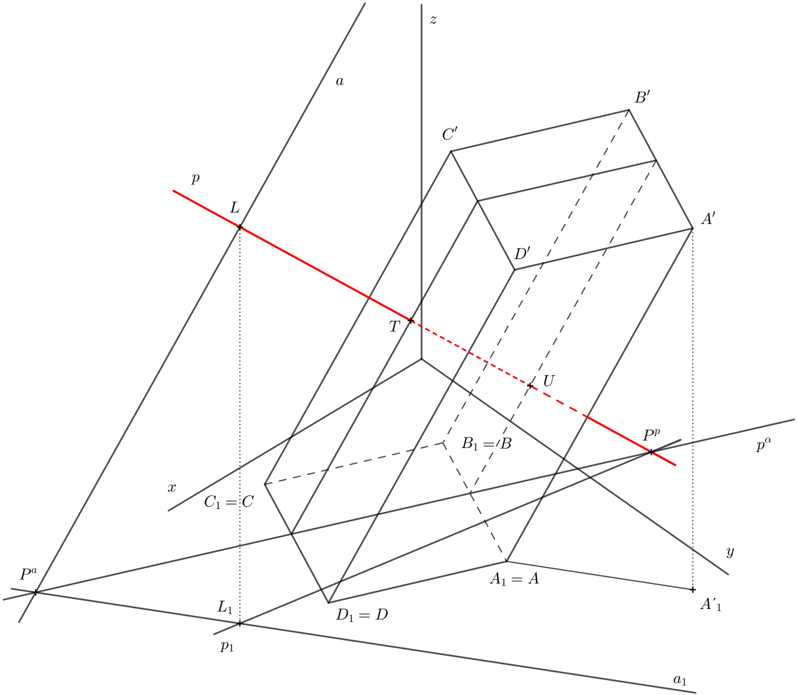
z
B'
C'
p
L
A'
D'
$B_1 = B$
x
$C_1 = C$
y
$A_1 = A$
L_1
$D_1 = D$
A'_1
p_1


z
a
B′
C′
p
L
A′
D′
B₁ = B
x
C₁ = C
y
A₁ = A
A′₁
L₁
D₁ = D
p₁
a₁


z
a
B'
C'
p
L
A'
D'
P^p
p^α
$B_1 = B$
x
$C_1 = C$
y
P^a
$A_1 = A$
A'_1
L_1
$D_1 = D$
p_1
a_1


z
a
B′
C′
p
L
A′
D′
P^p
p^α
$B_1 = B$
x
$C_1 = C$
y
P^a
$A_1 = A$
A'_1
L_1
$D_1 = D$
p_1
a_1


z
a
B′
C′
p
L
A′
D′
T
U
P^p
p^α
B₁ = B
x
C₁ = C
y
P^a
A₁ = A
A′₁
L₁
D₁ = D
p₁
a₁



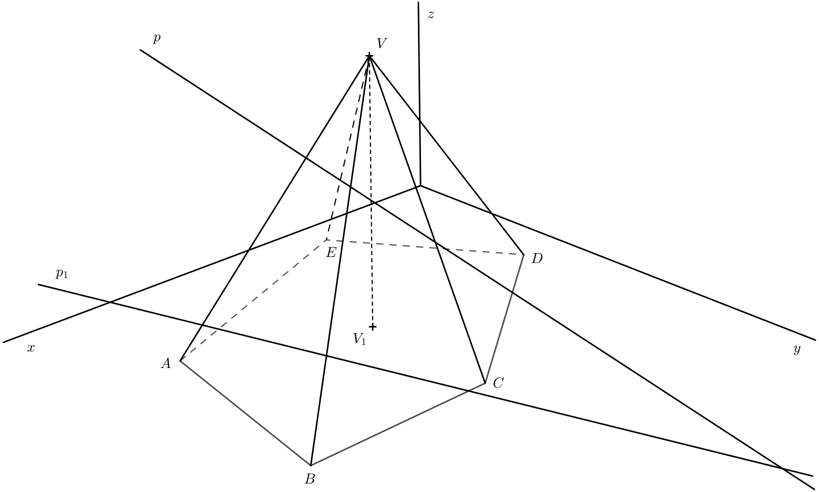
z
a
B′
C′
p
L
A′
D′
T
U
P^p
$B_1 = B$
p^α
x
$C_1 = C$
y
P^a
$A_1 = A$
L_1
A'_1
$D_1 = D$
p_1
a_1

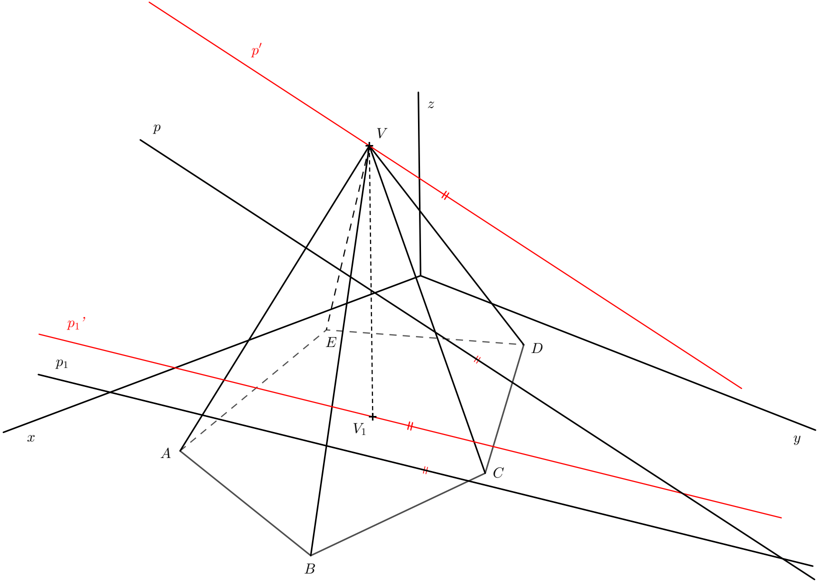
Příklad (Průsečík přímky s jehlanem)

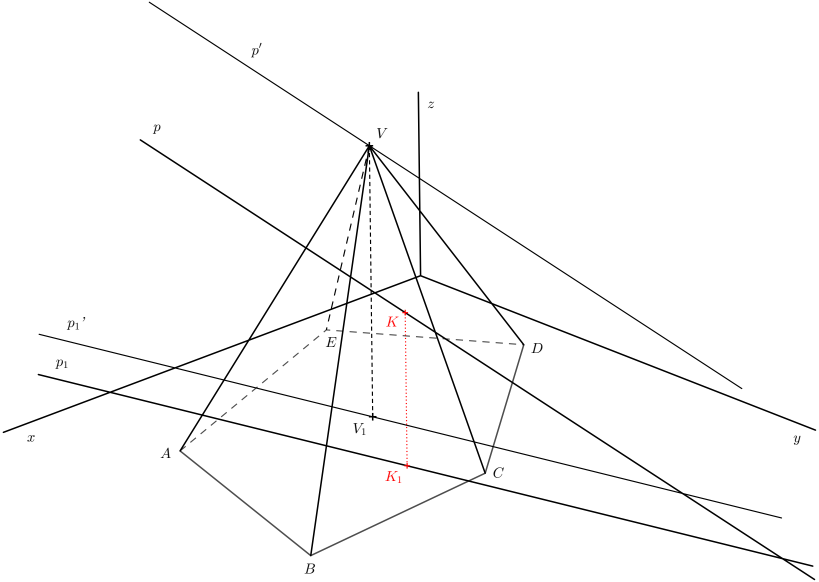
Určete průsečíky přímky p s daným jehlanem, jehož podstava leží v půdorysně, určete viditelnost tělesa a přímky.

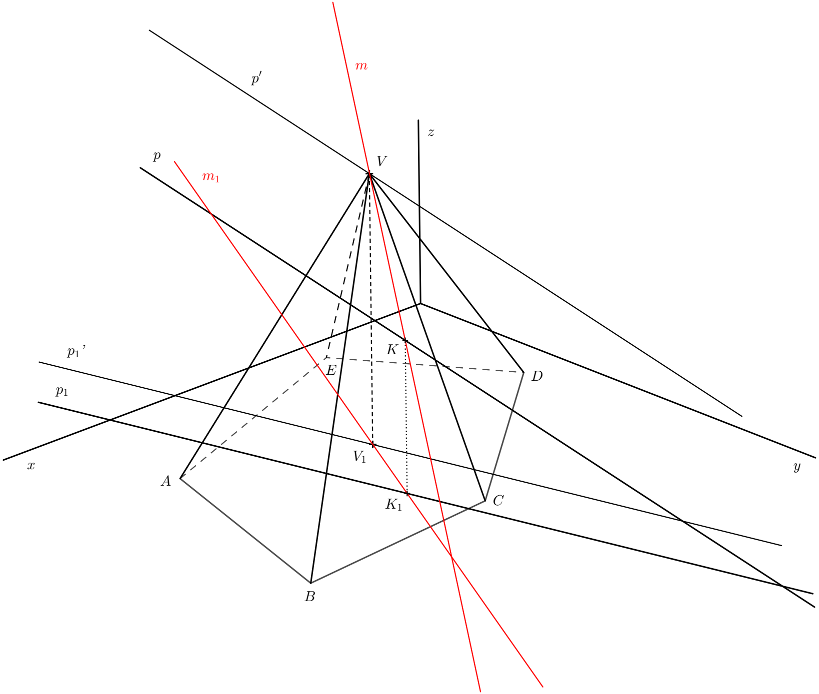
Řešení

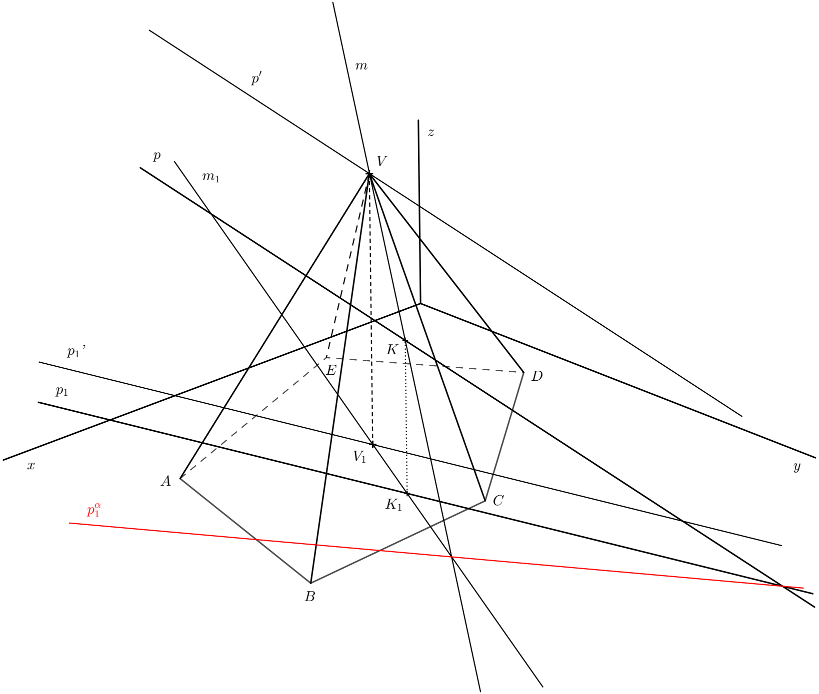
1. Přímkou p proložíme vrcholovou rovinu α, která prochází přímkou p a vrcholem V jehlanu. Bodem V vedeme například přímku p' rovnoběžnou s p a sestrojíme její půdorysný stopník. Pokud stopník vychází mimo pracovní plochu, můžeme vrcholem volit vhodnou různoběžnou přímku m s přímkou p. Stopníky přímek p a m prochází půdorysná stopa p^α vrcholové roviny α
2. Rovina α protíná daný jehlan v trojúhelníku, přímka p protíná trojúhelník řezu v bodech T a U, které jsou současně hledanými průsečíky dané přímky p s pláštěm daného jehlanu.


z
p
V
E
D
p_1
x
y
V_1
A
C
B

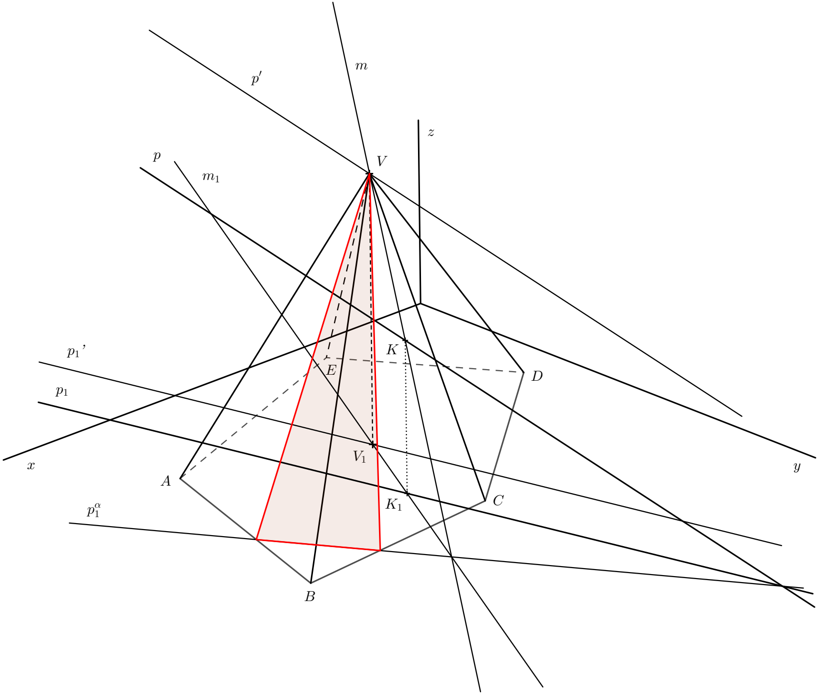

p'
z
p
V
p1'
E
D
p1
V1
x
y
A
C
B


p'
z
p
V
K
p₁'
E
D
p₁
V₁
x
y
A
C
K₁
B

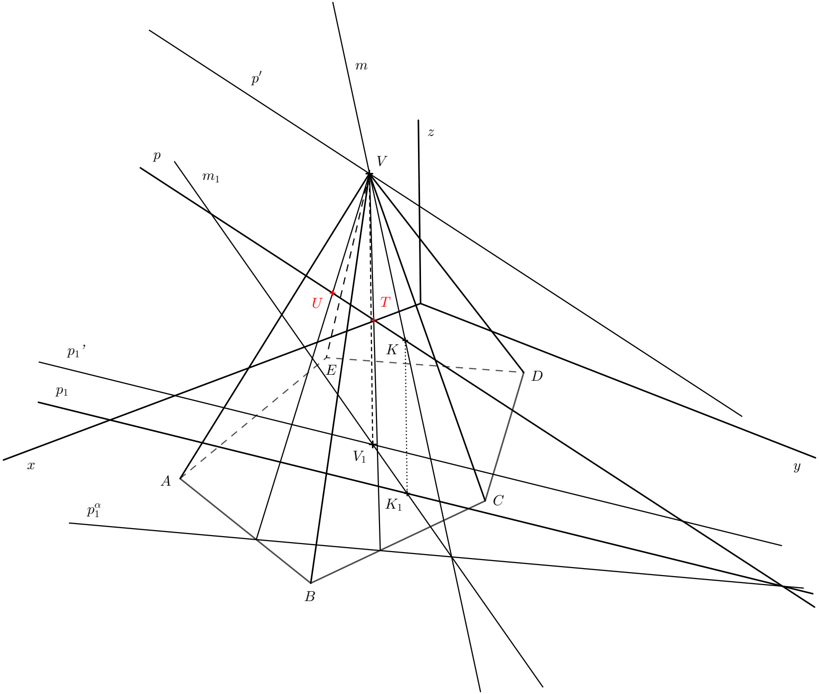

m
p′
z
p
V
m1
K
p1’
E
D
p1
x
V1
y
A
C
K1
B

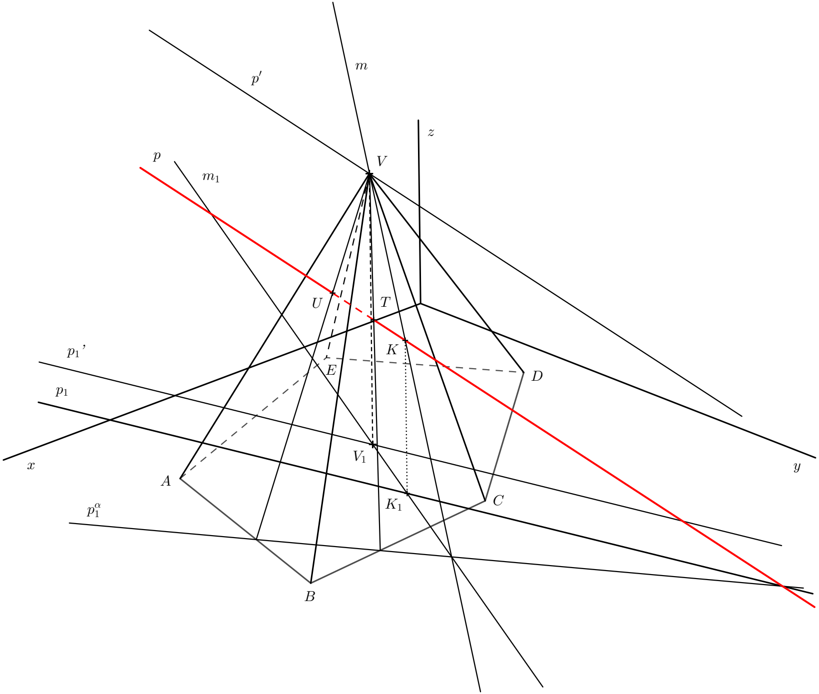


m
p'
z
V
p
m_1
K
p_1'
E
D
p_1
V_1
x
y
A
K_1
C
p_1^α
B



p'
m
z
V
p
m_1
K
p_1'
E
D
p_1
V_1
x
y
A
C
K_1
p_1^α
B


m
p'
z
V
p
m_1
U
T
K
p_1'
E
D
p_1
V_1
x
y
A
K_1
C
p_1^α
B


m
p'
z
p
V
m_1
U
T
K
p_1'
E
D
p_1
V_1
x
y
A
C
K_1
p_1^α
B

Děkuji za pozornost!