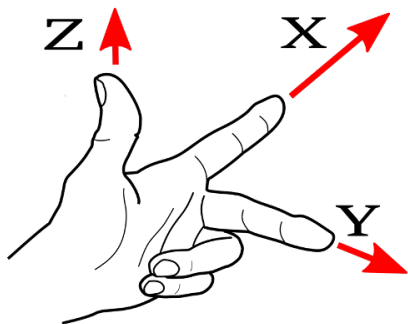


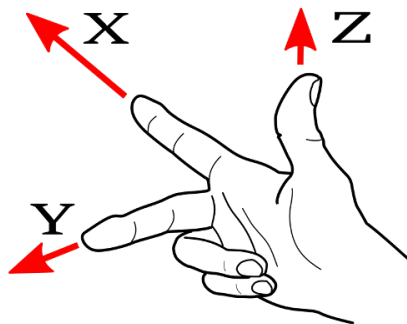
Rozšířený euklidovský prostor.
Perspektivní kolineace, perspektivní afinita.
Křivka afinní ke kružnici.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně



- Levotočivý souřadný systém

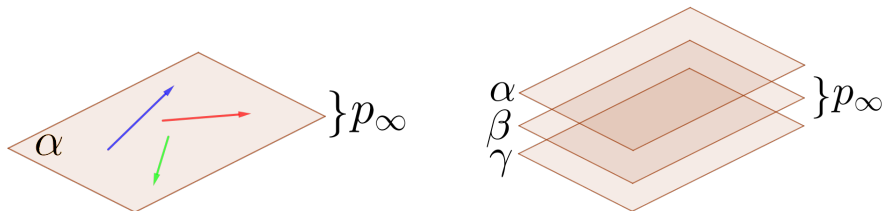


- Pravotočivý souřadný systém

- Každá vlastní přímka má jeden **nevlastní bod** (je incidentní s jedním nevlastním bodem).
- Nevlastní bod je určen směrem přímky, která je s tímto bodem incidentní.
- Všechny vzájemně rovnoběžné přímky se protínají v jediném nevlastním bodě.



- Každá vlastní rovina má jednu **nevlastní přímku** (je incidentní s nevlastní přímkou).
- Všechny vzájemně rovnoběžné roviny se protínají v jediné nevlastní přímce.



- Množina všech nevlastních bodů a přímek v trojrozměrném prostoru tvoří nevlastní rovinu.
- Je-li přímka rovnoběžná s rovinou, pak nevlastní bod přímky leží na nevlastní přímce roviny.

V dalších úvahách už budeme pracovat v rozšířeném Eukleidovském prostoru. Pokud bude situace jednoznačná, nebudeme zdůrazňovat, zda se jedná o vlastní nebo nevlastní útvary.

Zvolme na dané přímce p dva různé vlastní body A, B a kladný směr. Pak poloha libovolného dalšího bodu C je určena poměrem délek orientovaných úseček $|AC| : |BC| = \lambda$. Tento poměr nazýváme **dělicí poměr bodu C vzhledem k základním bodům A, B** , značíme (ABC) .

$(ABC) > 1$	bod C leží vně úsečky AB , tak aby $ AC > BC $
$0 < (ABC) < 1$	bod C leží vně úsečky AB , tak aby $ AC < BC $
$(ABC) < 0$	bod C leží uvnitř úsečky AB
$(ABC) = 0$	bod C splývá s bodem A

Hodnota dělicího poměru nezávisí na volbě orientace přímky.

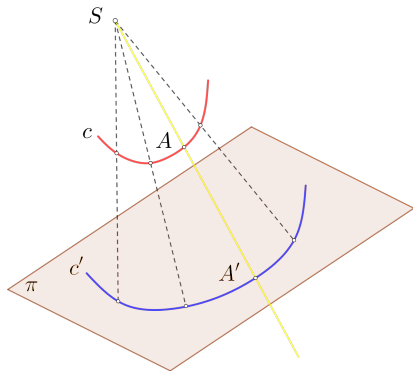
Dvojpoměrem čtyř bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) na orientované přímce nazýváme poměr $(ABC) : (ABD)$, tj. podíl dělicích poměrů bodů C a D vzhledem k základním bodům A, B ; značíme $(ABCD)$.

Definice

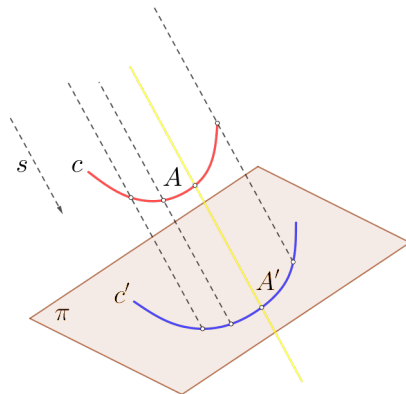
Zobrazení, ve kterém obrazem bodu A v prostoru různého od bodu S je průsečík A' přímky AS s rovinou π , se nazývá **promítání**. Bod S se nazývá **střed promítání**, rovina π **průmětna**, přímka AS **promítací přímka** (**promítací paprsek**), bod A' **průmět** bodu A , rovina procházející středem promítání **promítací rovina**.

Definice

Je-li střed S promítání vlastní bod, nazýváme promítání **středové** (**centrální**), je-li střed S promítání nevlastní bod, nazýváme promítání **rovnoběžné** (**paralelní**).



■ Středové promítání



■ Rovnoběžné promítání

- Průmětem bodu, různého od středu promítání, je bod.
- Průmětem přímky, která neprochází středem promítání, je přímka.
- Průmětem promítací přímky je bod, tj. její průsečík s průmětnou.
- Průmětem roviny, která neprochází středem promítání, je průmětna.
- Průmětem promítací roviny je přímka.
- Invariantem středového promítání je dvojpoměr čtyř bodů na přímce.

Důsledek:

- průmětem rovnoběžných přímek nejsou rovnoběžky,
- průmět nevlastního bodu může být bod vlastní i nevlastní.

- Invariantem rovnoběžného promítání je dělicí poměr tří bodů na přímce.

Důsledek:

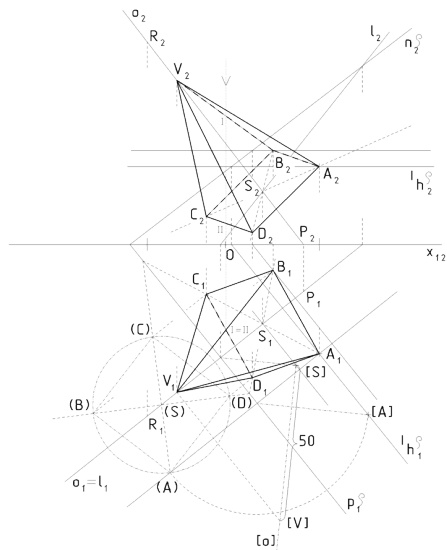
- průmětem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžky,
- průmět středu úsečky je střed průmětu úsečky,
- průmět vlastního bodu je bod vlastní.
- průmět nevlastního bodu je bod nevlastní.

Věta

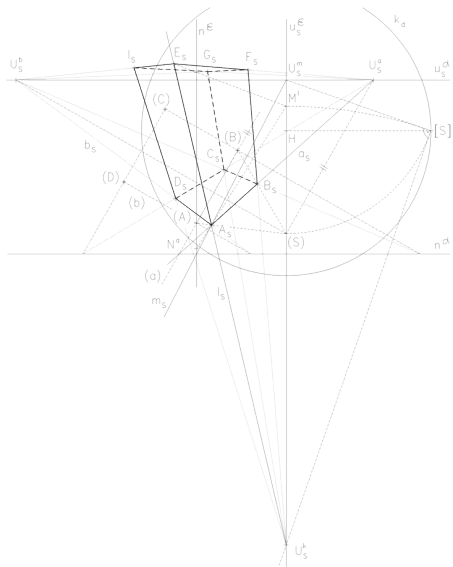
Incidence prvků se promítáním zachovává.

Poznámka:

- Metrické vlastnosti, tj. délky a úhly se obecně promítáním nezachovávají.

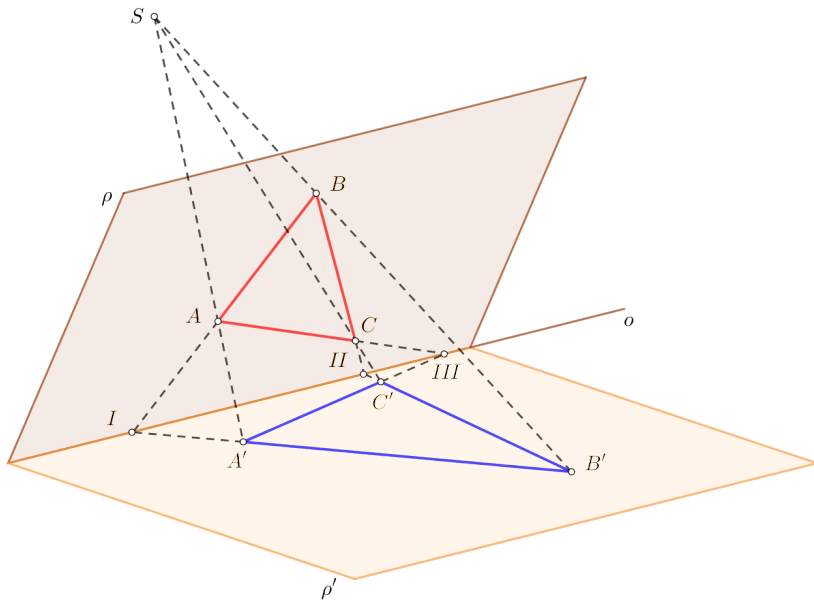


- Kótované promítání
- Mongeovo promítání
- Axonometrické promítání
 - pravouhlé (ortogonální)
 - kosoúhlé (klinogonální)



- Obecné středové promítání
- Lineární perspektiva
- Stereoskopické promítání (anaglyfy)
- Reliéf

Je dána trojboká jehlanová plocha s vrcholem S a dvě různoběžné roviny ρ a ρ' . Rovina ρ protíná jehlanovou plochu v trojúhelníku ABC a rovina ρ' protíná jehlanovou plochu v trojúhelníku $A'B'C'$. Pokud $\triangle ABC$ promítneme z bodu S do roviny ρ' , získáme $\triangle A'B'C'$. Máme zobrazení bodů a přímek roviny ρ do bodů a přímek roviny ρ' , ve kterém platí stejně jako v afinitě, že odpovídající si přímky se protínají na průsečnici rovin ρ a ρ' .



Definice

Nechť jsou dány dvě různé vlastní roviny ρ a ρ' a vlastní bod S neležící v žádné z daných rovin. Středovým promítáním ze středu S se body a přímky roviny ρ zobrazí do bodů a přímek roviny ρ' . Toto zobrazení se nazývá **perspektivní kolineace** (dále jen kolineace) mezi rovinami ρ a ρ' . Průsečnice rovin ρ a ρ' se nazývá **osa kolineace**, bod S se nazývá **střed kolineace**. Kolineace je jednoznačně určena středem S a rovinami ρ a ρ' .

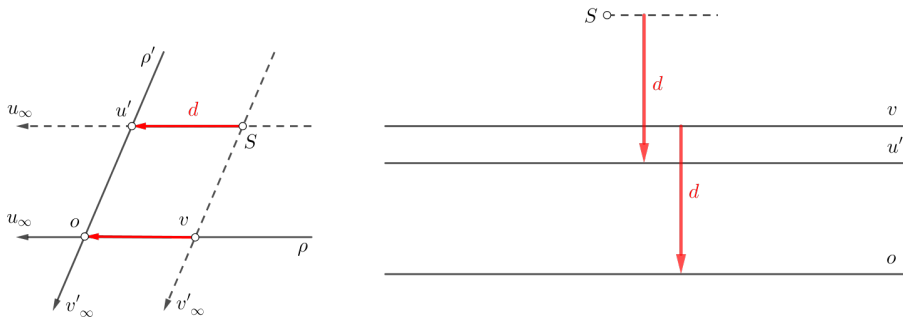
Základní vlastnosti kolineace:

- Bodu (přímce) jedné roviny je přiřazen jediný bod (jediná přímka) druhé roviny. Bodu A ležícímu na přímce a v rovině ρ je přiřazen bod A' na přímce a' v rovině ρ' , přičemž a' je obrazem přímky a (incidence se zachovává).
- Dvojice kolineárně sdružených bodů leží na přímkách procházejících středem kolineace (tyto přímky nazýváme paprsky kolineace).
- Kolineárně sdružené přímky se protínají na ose kolineace. Osa kolineace je množina samodružných bodů.

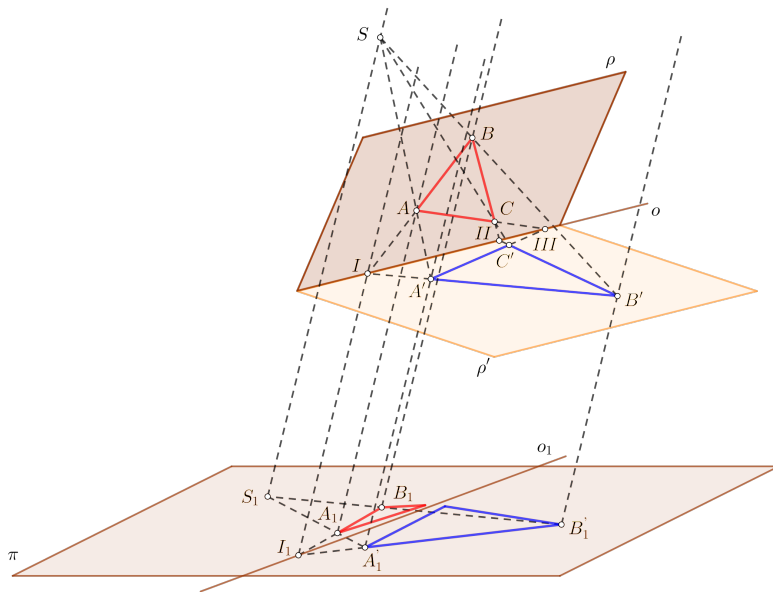
Označení:

- $A \rightarrow A'$ bude vyjadřovat, že obrazem bodu A je bod A' .
- $A \leftrightarrow A'$ bude vyjadřovat, že A a A' jsou kolineárně sdružené body.
- $p \leftrightarrow p'$ bude vyjadřovat, že p a p' jsou kolineárně sdružené přímky.
- **Úběžník přímky** – obraz nevlastního bodu, je to vlastní bod.
- **Úběžnice roviny** – obraz nevlastní přímky roviny, je to množina úběžníků všech přímek roviny.

- Orientovaná vzdálenost středu kolineace od úběžnice jedné roviny je rovna orientované vzdálenosti úběžnice druhé roviny od osy kolineace.



Promítneme-li ve směru s^* , který není rovnoběžný s žádnou z rovin ρ a ρ' , kolineaci mezi rovinami ρ a ρ' do libovolné roviny π (která není rovnoběžná se směrem s^*), získáme zobrazení nazývané **perspektivní kolineace v rovině**, dále jen kolineace.

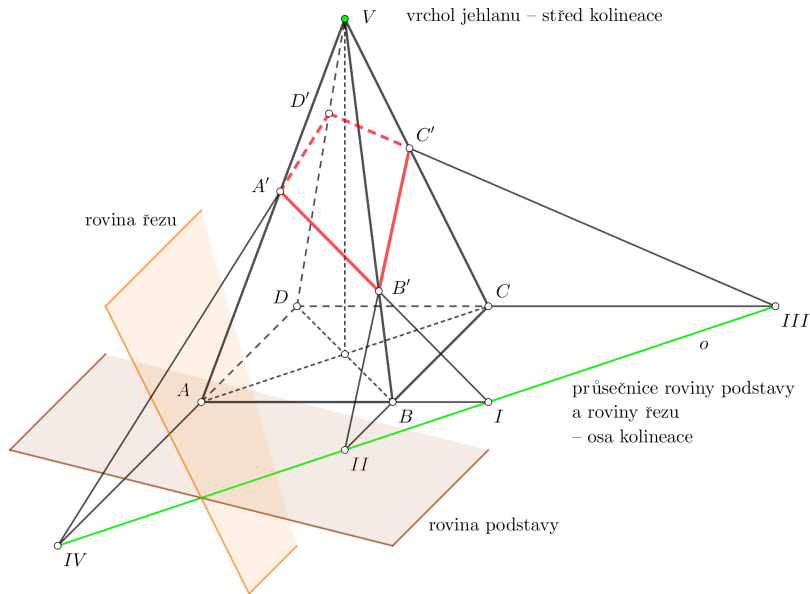


Užití kolineace

Kolineaci budete využívat při sestrojování rovinných řezů jehlanů a kuželů. Mezi podstavou a řezem je kolineární vztah, osou kolineace je průsečnice roviny podstavy a roviny řezu, středem kolineace je vrchol tělesa.

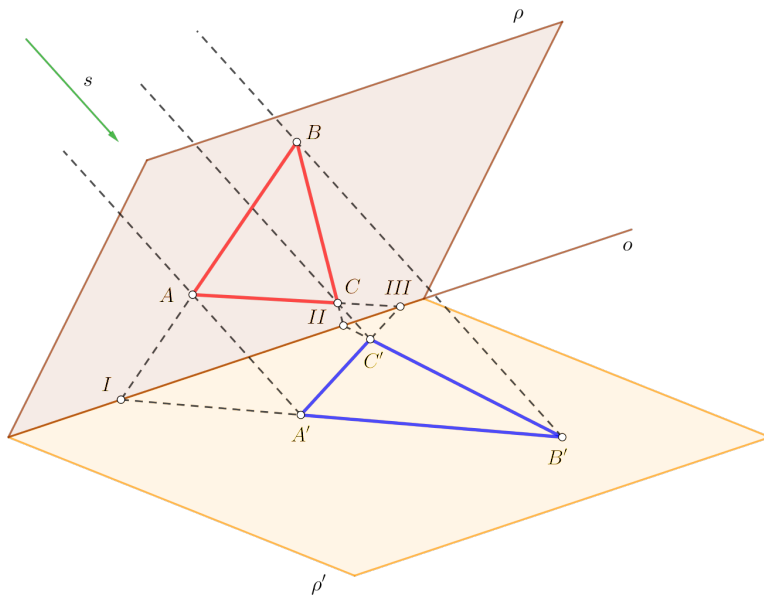
Postup při sestrojení řezu jehlanu nebo kužele:

1. Určíme jeden bod řezu jako průsečík libovolné povrchy (nebo osy tělesa) s rovinou řezu.
2. Využitím vlastností kolineace určíme čáru řezu jako křivku kolineární ke křivce podstavy (osa kolineace: průsečnice roviny podstavy a roviny řezu, pár odpovídajících si bodů: nalezený bod řezu a bod podstavy na téže povrchové přímce).



Je dána trojboká hranolová plocha, jejíž hrany a, b, c jsou rovnoběžné s daným směrem s . Dále jsou dány roviny ρ a ρ' , které se protínají v přímkce o . Rovina ρ protíná hranolovou plochu v $\triangle ABC$, rovina ρ' protíná hranolovou plochu v $\triangle A'B'C'$, $a(A, A') \parallel b(B, B') \parallel c(C, C') \parallel s$.

$\alpha(a, b)$ je rovina stěny hranolové plochy. V této rovině leží jak přímka $AB = \rho \cap \alpha$, tak přímka $A'B' = \rho' \cap \alpha$. Průsečík přímek AB a $A'B'$ (na obrázku označen I) musí ležet na průsečnici o rovin ρ a ρ' , protože je to společný bod tří rovin ρ, ρ', α . Můžeme také říci, že $\triangle A'B'C'$ vznikl promítnutím $\triangle ABC$ směrem s do roviny ρ' .



Definice

Nechť jsou dány dvě různé vlastní roviny ρ a ρ' a směr promítání s , který není rovnoběžný s žádnou z daných rovin. Rovnoběžným promítáním ve směru s se body a přímky roviny ρ zobrazí do bodů a přímek roviny ρ' . Získáme tak geometrické zobrazení v prostoru nazývané **perspektivní afinita** (dále jen afinita) mezi rovinami ρ a ρ' . Průsečnice rovin ρ a ρ' se nazývá **osa afinity**, směr s nazýváme **směr afinity**.

Základní vlastnosti finity:

- Bodu (přímce) jedné roviny je přiřazen jediný bod (jediná přímka) druhé roviny. Bodu A ležícímu na přímce a v rovině ρ je přiřazen bod A' na přímce a' v rovině ρ' , přičemž a' je obrazem přímky a (incidence se zachovává).
- Dvojice afinně sdružených bodů leží na přímkách rovnoběžných se směrem afinity (tyto přímky budeme nazývat paprsky afinity).
- Afinně sdružené přímky se protínají na ose afinity. Osa afinity je množina samodružných bodů.

Další důležité vlastnosti afinity:

- Nevlastní přímce jedné roviny odpovídá nevlastní přímka druhé roviny.
- Dvě rovnoběžné přímky se zobrazí do rovnoběžných přímek.
- Průsečíku M různoběžných přímek p, q odpovídá průsečík M' odpovídajících přímek p', q' .
- Afinita zachovává (jako každé rovnoběžné promítání) dělicí poměr i dvojpoměr.
- Středu S úsečky AB odpovídá střed S' úsečky $A'B'$ (důsledek předcházející vlastnosti).

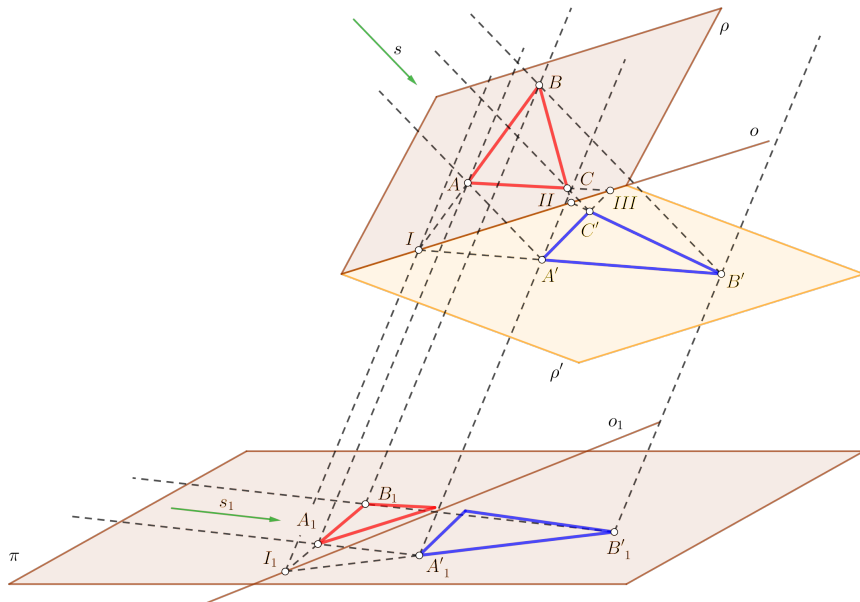
Označení:

- $A \rightarrow A'$ bude vyjadřovat, že obrazem bodu A je bod A' .
- $A \leftrightarrow A'$ bude vyjadřovat, že A a A' jsou afinně sdružené body.
- $p \leftrightarrow p'$ bude vyjadřovat, že p a p' jsou afinně sdružené přímky.

Afinita je dána:

- osou o a párem odpovídajících si bodů A, A' ; směr afinity je pak určen přímkou AA' ;
- osou o , směrem s a párem odpovídajících si přímek p, p' protínajících se na ose afinity;
- třemi páry afinně sdružených bodů, kde $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.

Promítneme-li afinitu o směru s mezi rovinami ρ a ρ' libovolným směrem s^* různým od s (s^* není rovnoběžný s ρ ani s ρ') do libovolné roviny (která není rovnoběžná se směrem s^*), získáme geometrické zobrazení nazývané **perspektivní afinita** v rovině (dále jen afinita).

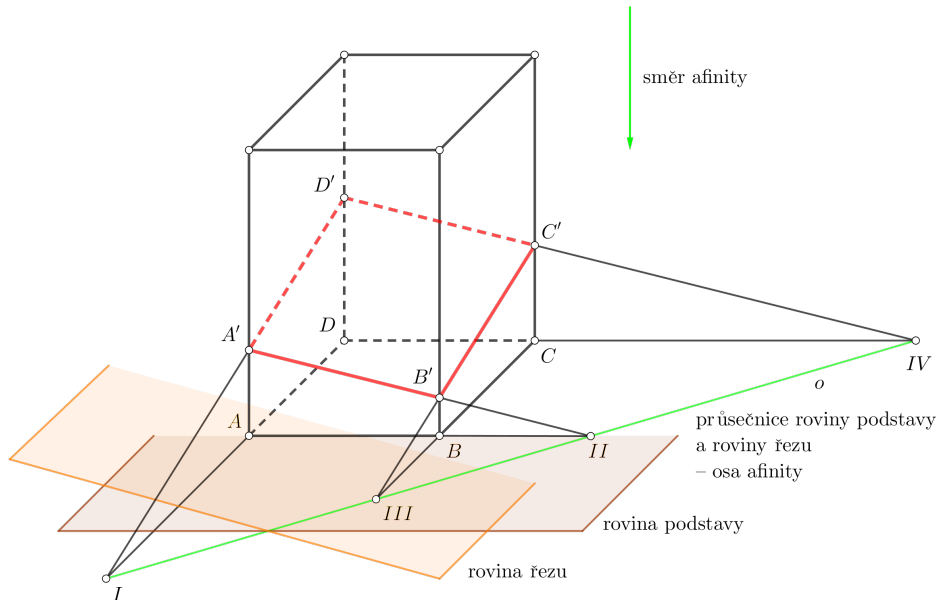


Užití afinity

Afinitu budete využívat při sestrojování rovinných řezů hranolů a válců. Mezi podstavou a řezem je afinní vztah, osou afinity je průsečnice roviny podstavy a roviny řezu, směr afinity je směr povrchových přímk tělesa (všechny povrchové přímky hranolu, resp. válce jsou rovnoběžné).

Postup při sestrojení řezu hranolu nebo válce:

1. Určíme jeden bod řezu jako průsečík libovolné površky (případně boční hrany hranolu) nebo osy tělesa s rovinou řezu.
2. Využitím vlastností afinity určíme čáru řezu jako křivku afinní ke křivce podstavy (osa afinity: průsečnice roviny podstavy a roviny řezu, pár odpovídajících si bodů: nalezený bod řezu a bod podstavy na téže povrchové přímce).



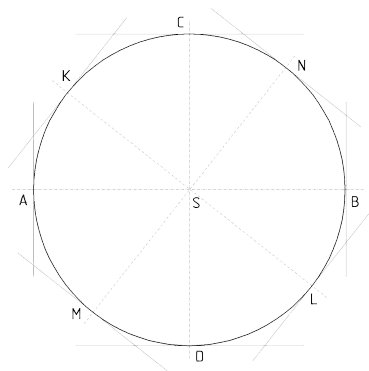
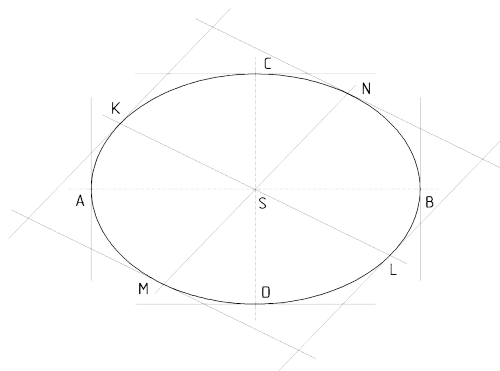
Definice

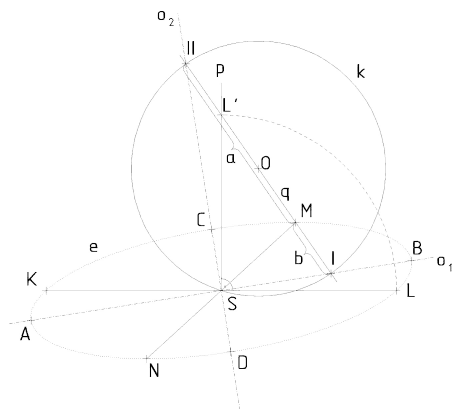
Průměrem elipsy (kružnice) se nazývá tětiva procházející jejím středem.

Definice

Dva **průměry** elipsy (kružnice) se nazývají **sdružené**, jestliže tečny v koncových bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem a naopak.

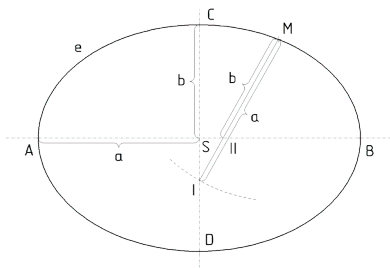
Sdruženými průměry kružnice rozumíme každou dvojici na sebe kolmých průměrů. Osy elipsy jsou jediná navzájem kolmá dvojice sdružených průměrů.



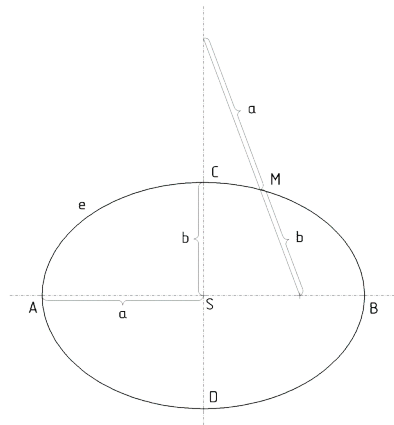


- Sestrojíme přímku p , která prochází středem S a je kolmá k některému průměru.

- Na přímce p určíme bod L' , pro který platí $|S'L'| = |SL|$.
- Sestrojíme přímku $q(L', M)$.
- Sestrojíme střed O úsečky $L'M$.
- Sestrojíme kružnici k , která má střed v bodě O a prochází bodem S .
- Určíme průsečíky I, II kružnice k s přímkou q .
- Hlavní osa elipsy je přímka $o_1(S, I)$, vedlejší osa elipsy je přímka $o_2(S, II)$ – hlavní osa leží v menším úhlu, který svírají sdružené průměry.
- Délka hlavní poloosy – $|MI|$; délka vedlejší poloosy – $|MII|$.



■ Rozdílová konstrukce

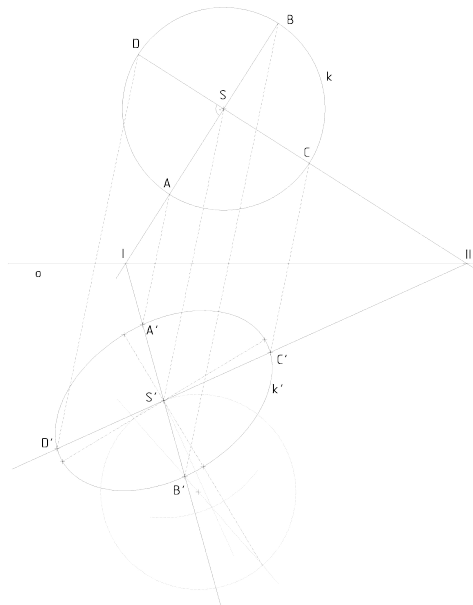


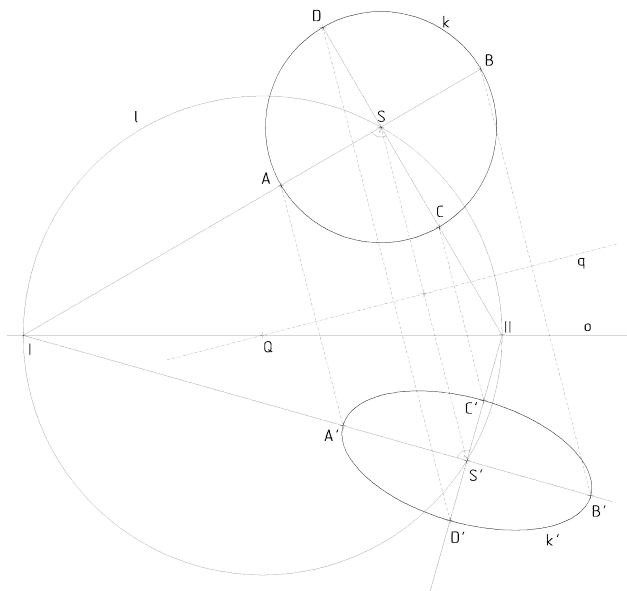
■ Součtová konstrukce

V osové afinitě se všechny vlastní body zobrazí opět na vlastní body, kuželosečce k odpovídá kuželosečka k' , je stejného typu a platí:

1. Bodům a tečnám vzoru odpovídají body a tečny obrazu,
2. Středu kuželosečky k odpovídá střed kuželosečky k' ,
3. Průměru kuželosečky k odpovídá průměr kuželosečky k' ,
4. Sdruženým průměrům kuželosečky k odpovídají sdružené průměry kuželosečky k' .

Obrazem kružnice k v osové afinitě je tedy elipsa.





Děkuji za pozornost!

