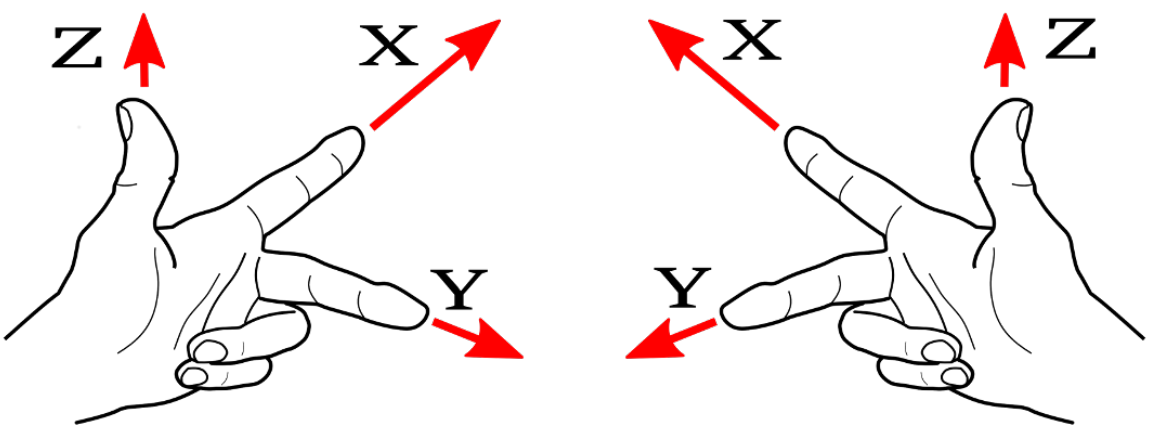
Rozšířený euklidovský prostor. Perspektivní kolineace, perspektivní afinita. Křivka afinní ke kružnici.

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Souřadný systém



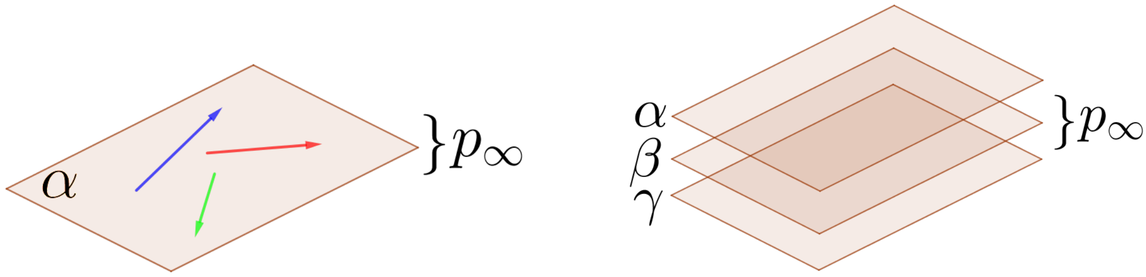
- Levotočivý souřadný systém
- Pravotočivý souřadný systém

Rozšířený euklidovský prostor

- Každá vlastní přímka má jeden **nevlastní bod** (je incidentní s jedním nevlastním bodem).
- Nevlastní bod je určen směrem přímky, která je s tímto bodem incidentní.
- Všechny vzájemně rovnoběžné přímky se protínají v jediném nevlastním bodě.

Rozšířený euklidovský prostor

- Každá vlastní rovina má jednu **nevlastní přímku** (je incidentní s nevlastní přímkou).
- Všechny vzájemně rovnoběžné roviny se protínají v jediné nevlastní přímce.



Rozšířený euklidovský prostor

- Množina všech nevlastních bodů a přímek v trojrozměrném prostoru tvoří nevlastní rovinu.
- Je-li přímka rovnoběžná s rovinou, pak nevlastní bod přímky leží na nevlastní přímce roviny.

V dalších úvahách už budeme pracovat v rozšířeném Eukleidovském prostoru. Pokud bude situace jednoznačná, nebudeme zdůrazňovat, zda se jedná o vlastní nebo nevlastní útvary.

Dělící poměr

Zvolme na dané přímce p dva různé vlastní body A, B a kladný směr. Pak poloha libovolného dalšího bodu C je určena poměrem délek orientovaných úseček $|AC| : |BC| = \lambda$. Tento poměr nazýváme **dělící poměr bodu** C **vzhledem k základním bodům** A, B, značíme (ABC).

$(ABC) > 1$	bod C leží vně úsečky AB, tak aby $\lvert AC\rvert > \lvert BC\rvert$
$0 < (ABC) < 1$	bod C leží vně úsečky AB, tak aby $\lvert AC\rvert < \lvert BC\rvert$
$(ABC) < 0$	bod C leží uvnitř úsečky AB
$(ABC) = 0$	bod C splývá s bodem A

Hodnota dělícího poměru nezávisí na volbě orientace přímky.

Dvojpoměrem čtyř bodů

Dvojpoměrem čtyř bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) **na orientované přímce** nazýváme poměr $(ABC) : (ABD)$, tj. podíl dělících poměrů bodů C a D vzhledem k základním bodům A, B; značíme $(ABCD)$.

Princip středového a rovnoběžného promítání

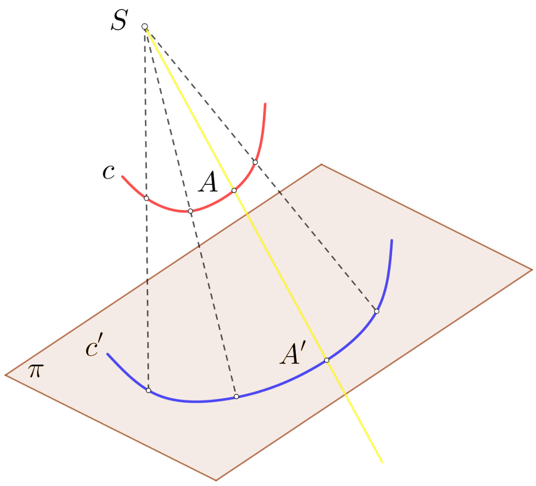
Definice

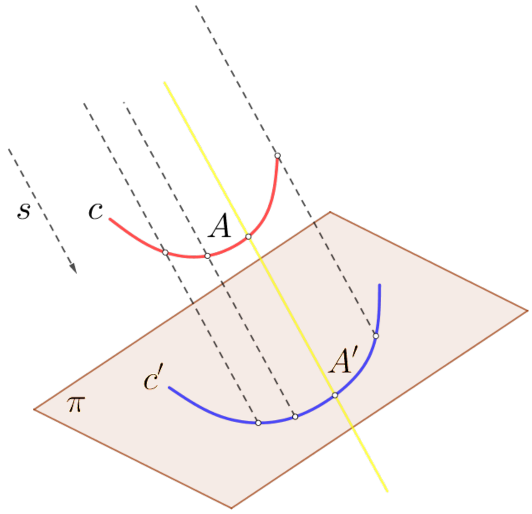
Zobrazení, ve kterém obrazem bodu A v prostoru různého od bodu S je průsečík A' přímky AS s rovinou π, se nazývá **promítání**. Bod S se nazývá **střed promítání**, rovina π **průmětna**, přímka AS **promítací přímka** (**promítací paprsek**), bod A' **průmět** bodu A, rovina procházející středem promítání **promítací rovina**.

Definice

Je-li střed S promítání vlastní bod, nazýváme promítání **středové** (**centrální**), je-li střed S promítání nevlastní bod, nazýváme promítání **rovnoběžné** (**paralelní**).

Princip středového a rovnoběžného promítání





- Středové promítání
- Rovnoběžné promítání

Vlastnosti promítání

- Průmětem bodu, různého od středu promítání, je bod.
- Průmětem přímky, která neprochází středem promítání, je přímka.
- Průmětem promítací přímky je bod, tj. její průsečík s průmětnou.
- Průmětem roviny, která neprochází středem promítání, je průmětna.
- Průmětem promítací roviny je přímka.
- Invariantem středového promítání je dvojpoměr čtyř bodů na přímce.

  Důsledek:
  - průmětem rovnoběžných přímek nejsou rovnoběžky,
  - průmět nevlastního bodu může být bod vlastní i nevlastní.

Vlastnosti promítání

- Invariantem rovnoběžného promítání je dělící poměr tří bodů na přímce.

  Důsledek:

  - průmětem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžky,
  - průmět středu úsečky je střed průmětu úsečky,
  - průmět vlastního bodu je bod vlastní.
  - průmět nevlastního bodu je bod nevlastní.

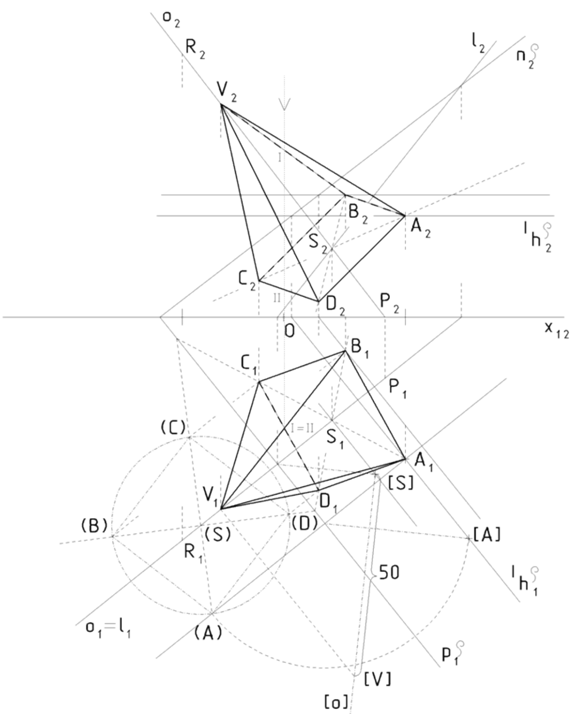
Věta

Incidence prvků se promítáním zachovává.

Poznámka:

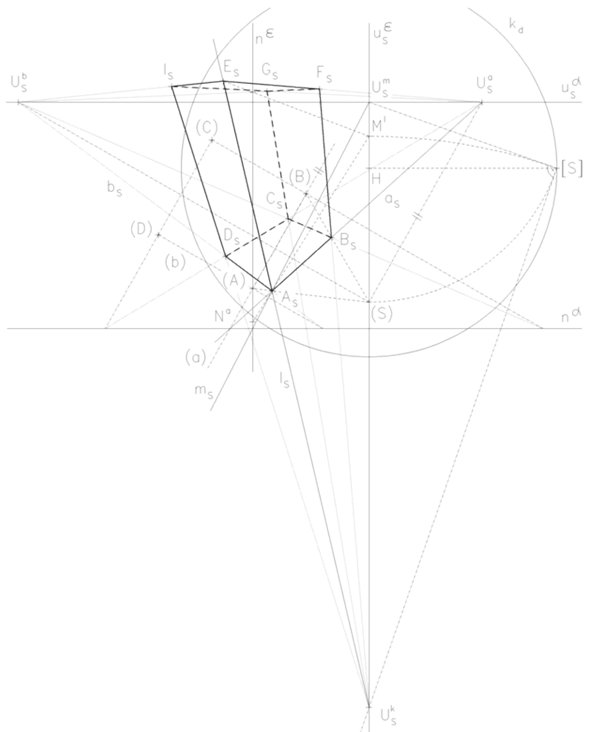
- Metrické vlastnosti, tj. délky a úhly se obecně promítáním nezachovají.

Zobrazovací metody - Rovnoběžná promítání



- Kótované promítaní
- Mongeovo promítání
- Axonometrické promítání
  - pravoúhlé (ortogonální)
  - kosoúhlé (klinogonální)

Zobrazovací metody - Středová promítání

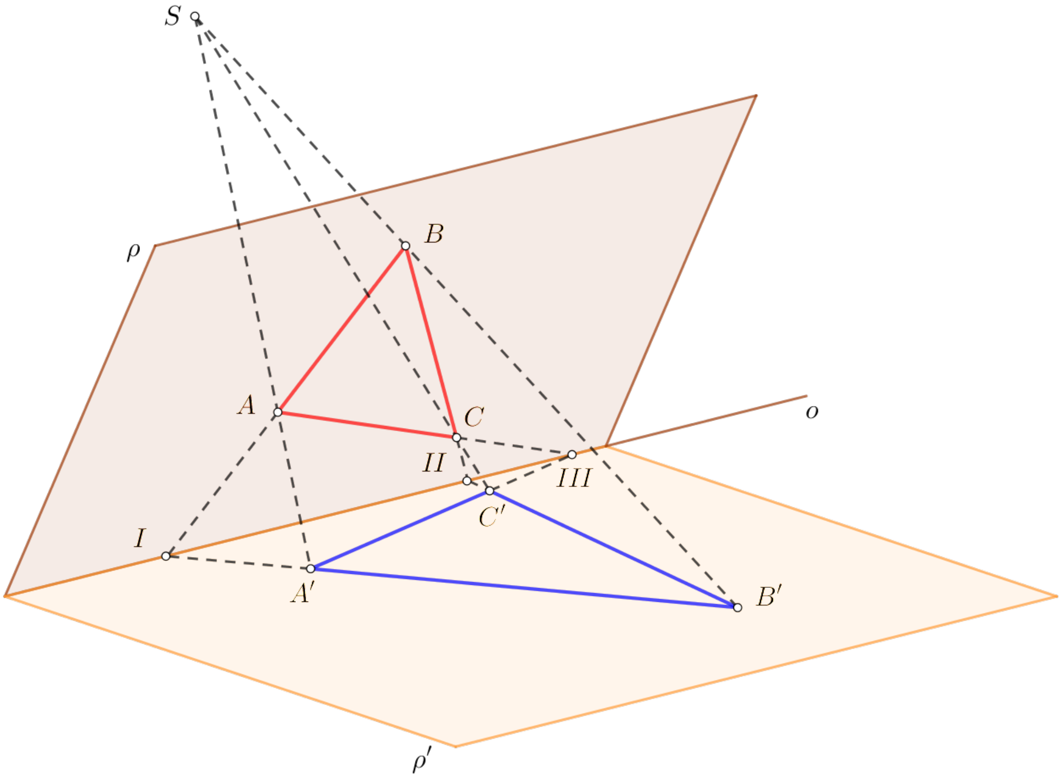


- Obecné středové promítání
- Lineární perspektiva
- Stereoskopické promítání (anaglyfy)
- Reliéf

Perspektivní kolineace

Je dána trojboká jehlanová plocha s vrcholem S a dvě různoběžné roviny ρ a ρ'. Rovina ρ protíná jehlanovou plochu v trojúhelníku ABC a rovina ρ' protíná jehlanovou plochu v trojúhelníku $A'B'C'$. Pokud $\triangle ABC$ promítneme z bodu S do roviny ρ', získáme $\triangle A'B'C'$. Máme zobrazení bodů a přímek roviny ρ do bodů a přímek roviny ρ', ve kterém platí stejně jako v afinitě, že odpovídající si přímky se protínají na průsečnici rovin ρ a ρ'.

Perspektivní kolineace



Perspektivní kolineace

Definice

Nechť jsou dány dvě různé vlastní roviny ρ a ρ' a vlastní bod S neležící v žádné z daných rovin. Středovým promítáním ze středu S se body a přímky roviny ρ zobrazí do bodů a přímek roviny ρ'. Toto zobrazení se nazývá **perspektivní kolineace** (dále jen kolineace) mezi rovinami ρ a ρ'. Průsečnice rovin ρ a ρ' se nazývá **osa kolineace**, bod S se nazývá **střed kolineace**. Kolineace je jednoznačně určena středem S a rovinami ρ a ρ'.

Perspektivní kolineace

Základní vlastnosti kolineace:

- Bodu (přímce) jedné roviny je přiřazen jediný bod (jediná přímka) druhé roviny. Bodu A ležícímu na přímce a v rovině ρ je přiřazen bod A' na přímce a' v rovině ρ', přičemž a' je obrazem přímky a (incidence se zachovává).
- Dvojice kolineárně sdružených bodů leží na přímkách procházejících středem kolineace (tyto přímky nazýváme paprsky kolineace).
- Kolineárně sdružené přímky se protínají na ose kolineace. Osa kolineace je množina samodružných bodů.

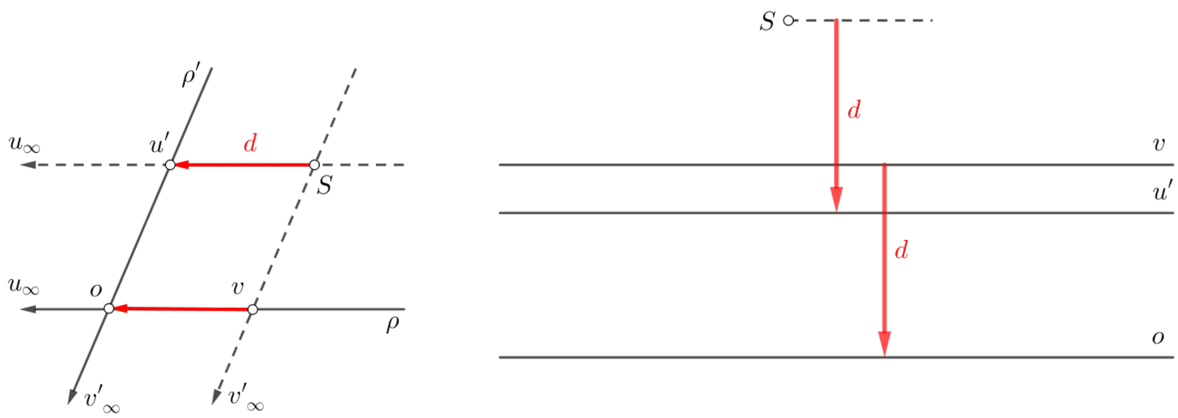
Perspektivní kolineace

Označení:

- $A \rightarrow A'$ bude vyjadřovat, že obrazem bodu A je bod A'.
- $A \leftrightarrow A'$ bude vyjadřovat, že A a A ′ jsou kolineárně sdružené body.
- $p \leftrightarrow p'$ bude vyjadřovat, že p a p ′ jsou kolineárně sdružené přímky.
- **Úběžník přímky** – obraz nevlastního bodu, je to vlastní bod.
- **Úběžnice roviny** – obraz nevlastní přímky roviny, je to množina úběžníků všech přímek roviny.

Perspektivní kolineace

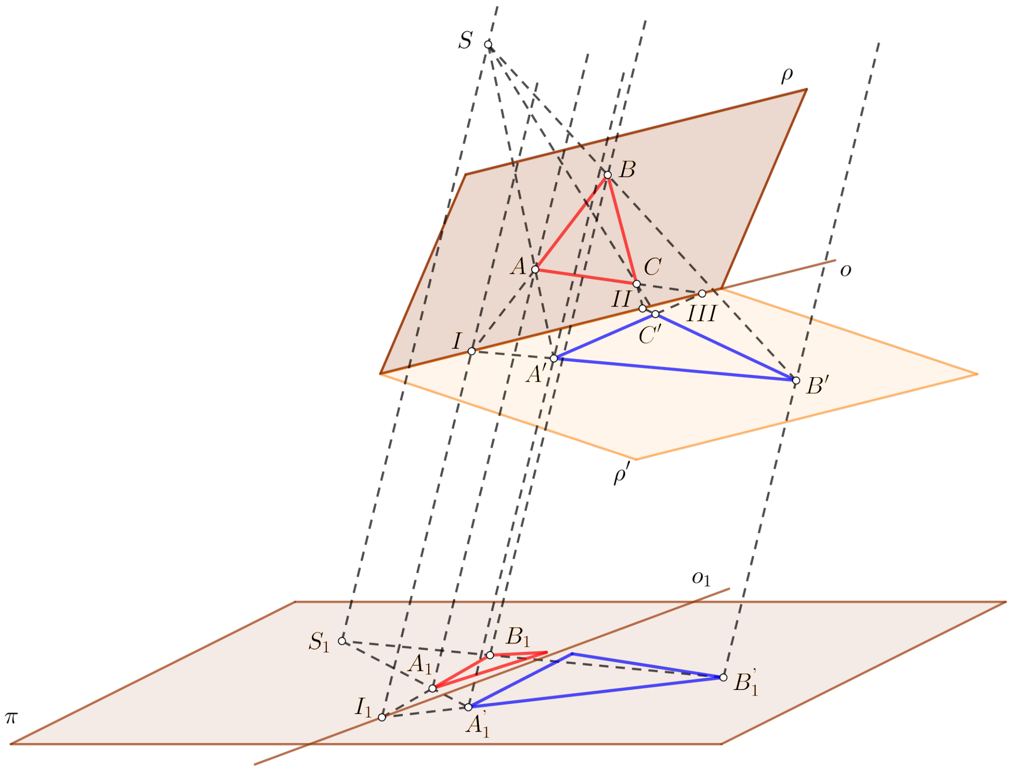
- Orientovaná vzdálenost středu kolineace od úběžnice jedné roviny je rovna orientované vzdálenosti úběžnice druhé roviny od osy kolineace.



Perspektivní kolineace

Promítneme-li ve směru s^*, který není rovnoběžný s žádnou z rovin ρ a ρ', kolineaci mezi rovinami ρ a ρ' do libovolné roviny π (která není rovnoběžná se směrem s^*), získáme zobrazení nazývané **perspektivní kolineace v rovině**, dále jen kolineace.

Perspektivní kolineace



Perspektivní kolineace

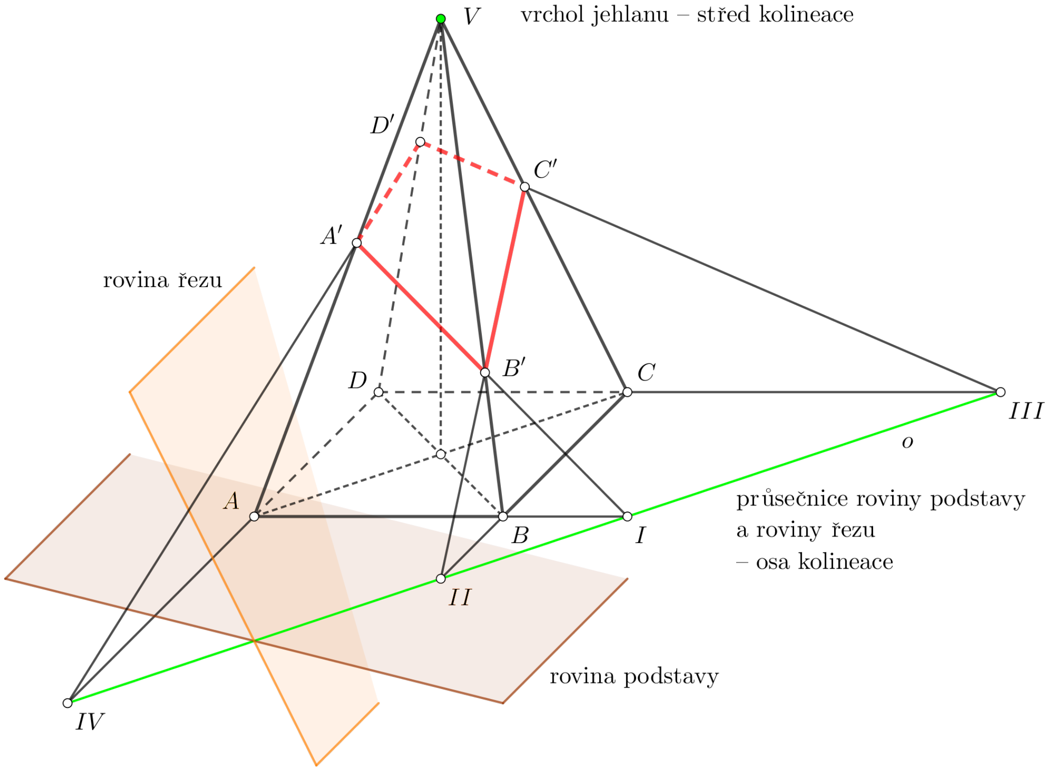
Užití kolineace

Kolineaci budete využívat při sestrojování rovinných řezů jehlanů a kuželů. Mezi podstavou a řezem je kolineární vztah, osou kolineace je průsečnice roviny podstavy a roviny řezu, středem kolineace je vrchol tělesa.

Postup při sestrojení řezu jehlanu nebo kužele:

1. Určíme jeden bod řezu jako průsečík libovolné površky (nebo osy tělesa) s rovinou řezu.
2. Využitím vlastností kolineace určíme čáru řezu jako křivku kolineární ke křivce podstavy (osa kolineace: průsečnice roviny podstavy a roviny řezu, pár odpovídajících si bodů: nalezený bod řezu a bod podstavy na téže povrchové přímce).

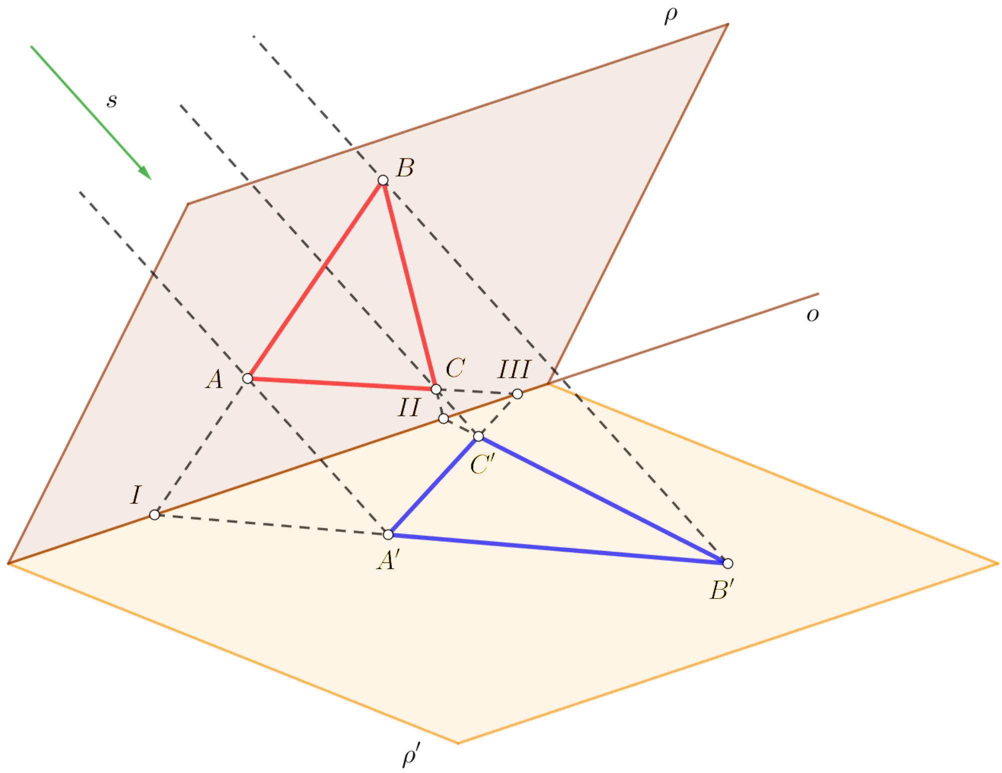
Perspektivní kolineace



Perspektivní afinita

Je dána trojboká hranolová plocha, jejíž hrany a, b, c jsou rovnoběžné s daným směrem s. Dále jsou dány roviny ρ a ρ', které se protínají v přímce o. Rovina ρ protíná hranolovou plochu v $\triangle ABC$, rovina ρ' protíná hranolovou plochu v $\triangle A'B'C'$, $a(A, A')\|b(B, B')\|c(C, C')\|s$.
$\alpha(a, b)$ je rovina stěny hranolové plochy. V této rovině leží jak přímka $AB = \rho \cap \alpha$, tak přímka $A'B' = \rho' \cap \alpha$. Průsečík přímek AB a $A'B'$ (na obrázku označen I) musí ležet na průsečnici o rovin ρ a ρ', protože je to společný bod tří rovin ρ, ρ', α. Můžeme také říci, že $\triangle A'B'C'$ vznikl promítnutím $\triangle ABC$ směrem s do roviny ρ'.

Perspektivní afinita



Perspektivní afinita

Definice

Nechť jsou dány dvě různé vlastní roviny ρ a ρ' a směr promítání s, který není rovnoběžný s žádnou z daných rovin. Rovnoběžným promítáním ve směru s se body a přímky roviny ρ zobrazí do bodů a přímek roviny ρ'. Získáme tak geometrické zobrazení v prostoru nazývané **perspektivní afinita** (dále jen afinita) mezi rovinami ρ a ρ'. Průsečnice rovin ρ a ρ' se nazývá **osa afinity**, směr s nazýváme **směr afinity**.

Perspektivní afinita

Základní vlastnosti finity:

- Bodu (přímce) jedné roviny je přiřazen jediný bod (jediná přímka) druhé roviny. Bodu A ležícímu na přímce a v rovině ρ je přiřazen bod A' na přímce a' v rovině ρ', přičemž a' je obrazem přímky a (incidence se zachovává).
- Dvojice afinně sdružených bodů leží na přímkách rovnoběžných se směrem afinity (tyto přímky budeme nazývat paprsky afinity).
- Afinně sdružené přímky se protínají na ose afinity. Osa afinity je množina samodružných bodů.

Perspektivní afinita

Další důležité vlastnosti afinity:

- Nevlastní přímce jedné roviny odpovídá nevlastní přímka druhé roviny.
- Dvě rovnoběžné přímky se zobrazí do rovnoběžných přímek.
- Průsečíku M různoběžných přímek p, q odpovídá průsečík M' odpovídajících přímek p', q'.
- Afinita zachovává (jako každé rovnoběžné promítání) dělící poměr i dvojpoměr.
- Středu S úsečky AB odpovídá střed S' úsečky $A'B'$ (důsledek předcházející vlastnosti).

Perspektivní afinita

Označení:

- $A \to A'$ bude vyjadřovat, že obrazem bodu A je bod A'.
- $A \leftrightarrow A'$ bude vyjadřovat, že A a A ′ jsou afinně sdružené body.
- $p \leftrightarrow p'$ bude vyjadřovat, že p a p ′ jsou afinně sdružené přímky.

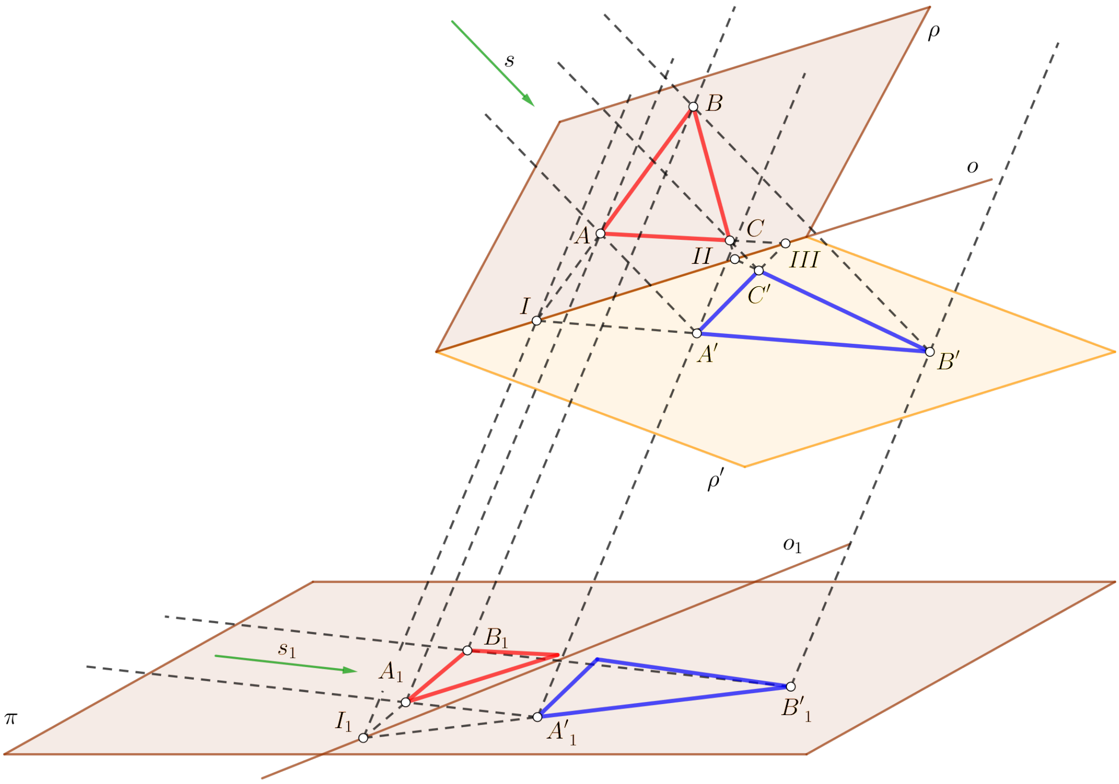
Afinita je dána:

- osou o a párem odpovídajících si bodů A, A'; směr afinity je pak určen přímkou AA';
- osou o, směrem s a párem odpovídajících si přímek p, p' protínajících se na ose afinity;
- třemi páry afinně sdružených bodů, kde $AA' \| BB' \| CC'$.

Perspektivní afinita

Promítneme-li afinitu o směru s mezi rovinami ρ a ρ' libovolným směrem s^* různým od s (s^* není rovnoběžný s ρ ani s ρ') do libovolné roviny (která není rovnoběžná se směrem s^*), získáme geometrické zobrazení nazývané **perspektivní afinita** v rovině (dále jen afinita).

Perspektivní afinita



Perspektivní afinita

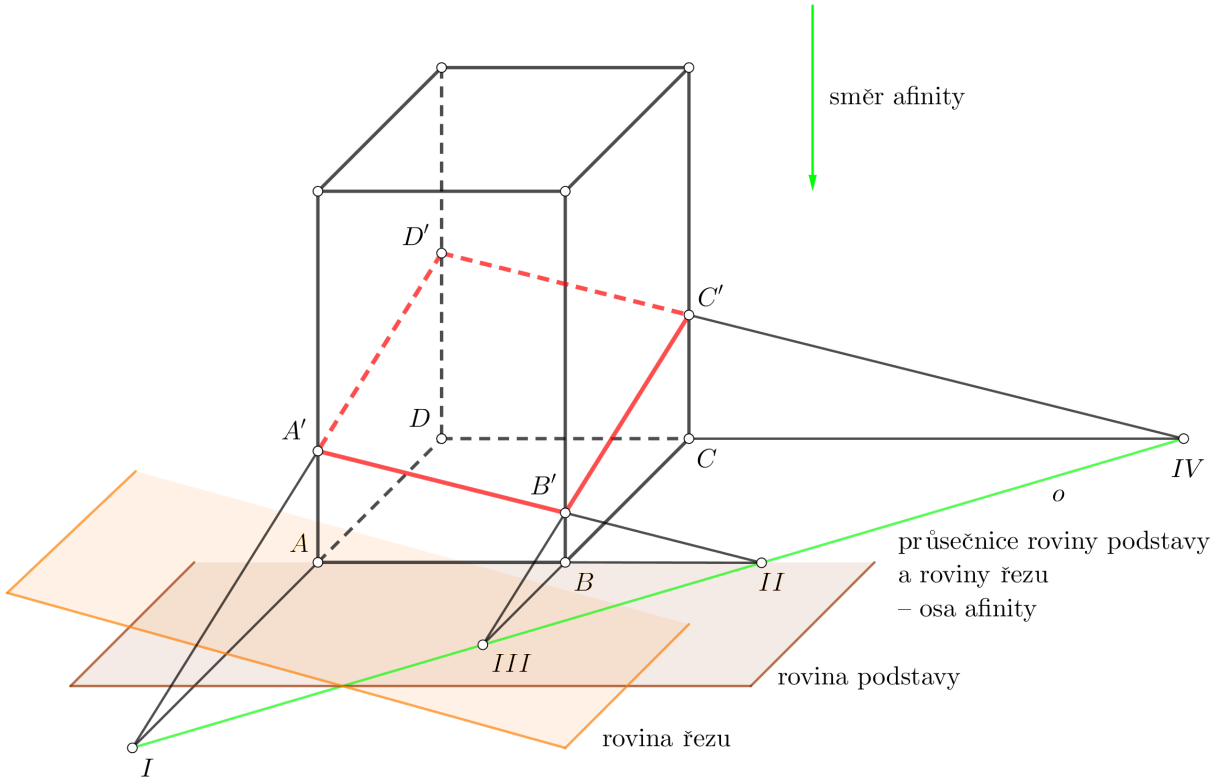
Užití afinity

Afinitu budete využívat při sestrojování rovinných řezů hranolů a válců. Mezi podstavou a řezem je afinní vztah, osou afinity je průsečnice roviny podstavy a roviny řezu, směr afinity je směr povrchových přímek tělesa (všechny povrchové přímky hranolu, resp. válce jsou rovnoběžné).

Postup při sestrojení řezu hranolu nebo válce:

1. Určíme jeden bod řezu jako průsečík libovolné površky (případně boční hrany hranolu) nebo osy tělesa s rovinou řezu.
2. Využitím vlastností afinity určíme čáru řezu jako křivku afinní ke křivce podstavy (osa afinity: průsečnice roviny podstavy a roviny řezu, pár odpovídajících si bodů: nalezený bod řezu a bod podstavy na téže povrchové přímce).

Perspektivní afinita



Sdružené průměry elipsy [cvičení]

Definice

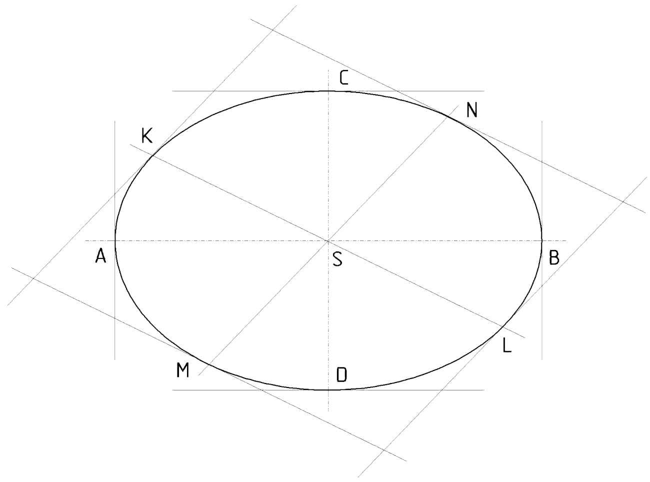
Průměrem elipsy (kružnice) se nazývá tětiva procházející jejím středem.

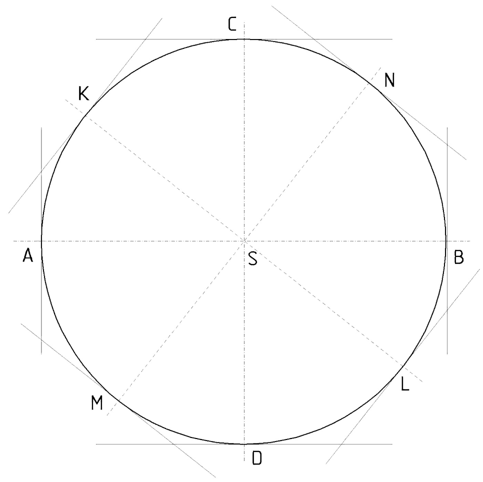
Definice

Dva **průměry** elipsy (kružnice) se nazývají **sdružené**, jestliže tečny v koncových bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem a naopak.

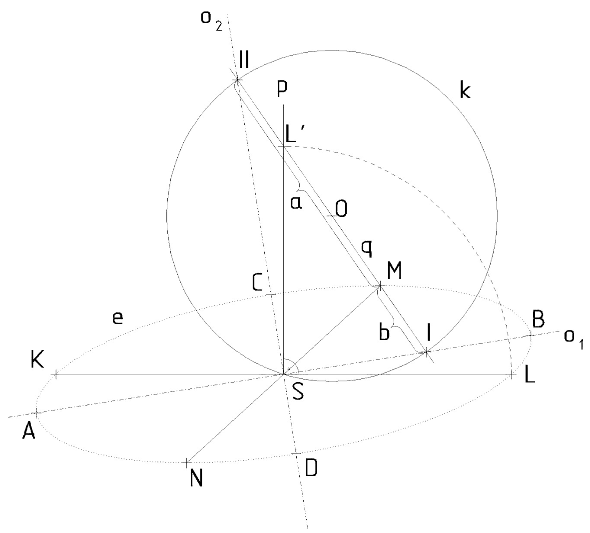
Sdruženými průměry kružnice rozumíme každou dvojici na sebe kolmých průměrů. Osy elipsy jsou jediná navzájem kolmá dvojice sdružených průměrů.

Sdružené průměry elipsy [cvičení]



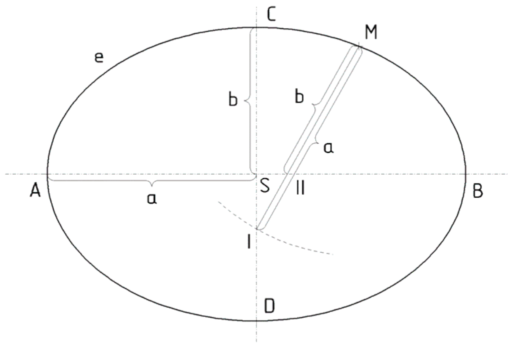


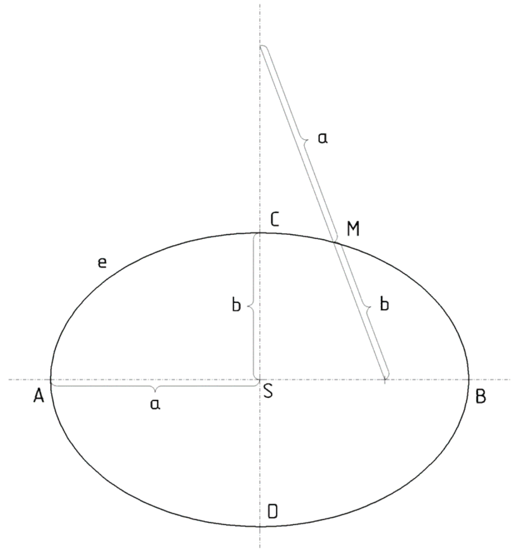
Rytzova konstrukce [cvičení]



- Sestrojíme přímku p, která prochází středem S a je kolmá k některému průměru.
- Na přímce p určíme bod L', pro který platí $|S'L'| = |SL|$.
- Sestrojíme přímku $q(L', M)$.
- Sestrojíme střed O úsečky $L'M$.
- Sestrojíme kružnici k, která má střed v bodě O a prochází bodem S.
- Určíme průsečíky I, II kružnice k s přímkou q.
- Hlavní osa elipsy je přímka $o_1(S, I)$, vedlejší osa elipsy je přímka $o_2(S, II)$ – hlavní osa leží v menším úhlu, který svírají sdružené průměry.
- Délka hlavní poloosy – $|MI|$; délka vedlejší poloosy – $|MII|$.

Proužková konstrukce elipsy [cvičení]





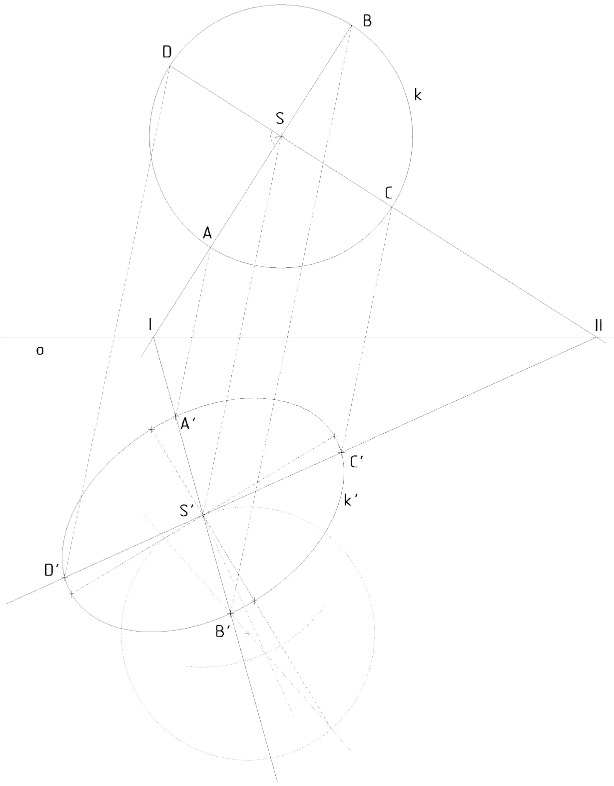
- Rozdílová konstrukce
- Součtová konstrukce

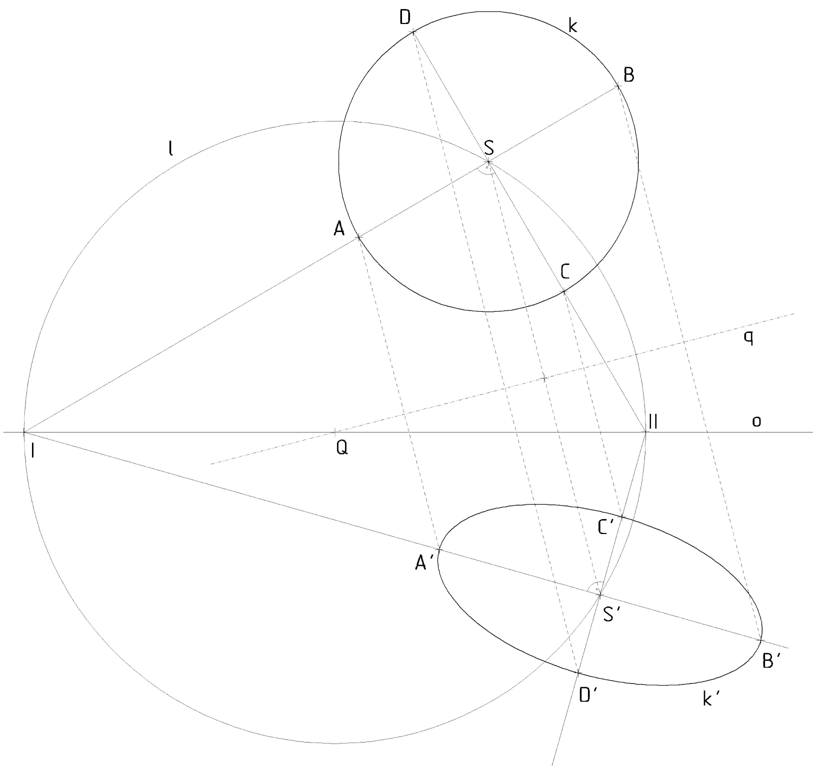
Kružnice v perspektivní afinitě

V osové afinitě se všechny vlastní body zobrazí opět na vlastní body, kuželosečce k odpovídá kuželosečka k', je stejného typu a platí:

1. Bodům a tečnám vzoru odpovídají body a tečny obrazu,
2. Středu kuželosečky k odpovídá střed kuželosečky k',
3. Průměru kuželosečky k odpovídá průměr kuželosečky k',
4. Sdruženým průměrům kuželosečky k odpovídají sdružené průměry kuželosečky k'.

Obrazem kružnice k v osové afinitě je tedy elipsa.


B
D
k
S
C
A
I
II
o
A´
C´
k´
S´
D´
B´


D
k
B
l
S
A
C
q
II
o
I
Q
C´
A´
S´
B´
D´
k´

Děkuji za pozornost!