



FACULTY OF CIVIL institute  
ENGINEERING of mathematics  
and descriptive geometry

# Stereografická projekce

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

- Talanda, Pavel: *Deskriptivní geometrie, vybrané kapitoly z kartografie pro obor geodzie*, Fakulta stavební VUT, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2014.

- Autorský kolektiv Ústavu matematiky a deskriptivní geometrie FaSt VUT v Brně: *Sbírka řešených příkladů z konstruktivní geometrie*, Fakulta stavební VUT v Brně, 2021.

<https://www.geogebra.org/m/ejhn4jay>

The logo for GeoGebra, featuring the word 'GeoGebra' in a grey sans-serif font. The letter 'o' is replaced by a geometric diagram consisting of a circle with five blue dots on its circumference, connected by lines to form a pentagon.

- Černý, Jaroslav – Kočandrllová, Milada: *Konstruktivní geometrie*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1998.
- Drábek, Karel – Harant, František – Setzer, Ota: *Deskriptivní geometrie II*, ANTL/ALFA, Praha 1979.
- Finda, Jaromír: *Kartografická zobrazení*, Diplomová práce, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita v Brně, Brno 2005. <https://is.muni.cz/th/dv9gw/>.
- Juklová Lenka: *Aplikace deskriptivní geometrie, Základy kartografie a cyklografie*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 2013.
- Klapka Jiří - Piska, Rudolf - Zezula, Jaromír: *Deskriptivní geometrie, II. díl (se základy kartografie a stereotomie)*, Vysoké učení technické, Fakulta inženýrského stavitelství, SNTL, Praha 1953.

- Medek, Václav – Zámožík, Jozef: *Konstruktívna geometria pre technikov*, ALFA, Bratislava 1978.
- Nguyen, Viet Bach: *Kartografické projekce*, Ročníková práce z deskriptivní geometrie, Gymnázium Christiana Dopplera, Praha 2012. <http://www.machu.euweb.cz/g-nguyen.pdf>.
- Piska, Rudolf: *Úvod do geometrie kartografických zobrazení*, Fakulta stavební VUT v Brně, Ediční středisko VUT, Brno 1975.
- Pohanková, Dana: *Geometrická azimutální zobrazení v kartografii*, Bakalářská práce, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita v Brně, Brno 2014. <https://is.muni.cz/th/i5oap/>.
- Švec, Rudolf: *Kartografické zobrazovací metody*, Vyšší pedagogická škola České BUdějovice, SPN, n.p., 1957.



- Stereografickou projekci začal používat Hipparchos z Nicee (180 – 125 př. n. l.), který je považován za zakladatele matematického zeměpisu. Kromě jiného jako první popisoval polohu bodu na zemi zeměpisnými souřadnicemi.
- V roce 1613 se zavádí název “stereographique” (François d’Aiguillon)



Ilustrace od Petera Paula Rubense ke knize od Françoise d'Aguilona:  
*Opticorum libri sex philosophis juxta ac mathematicis utiles*



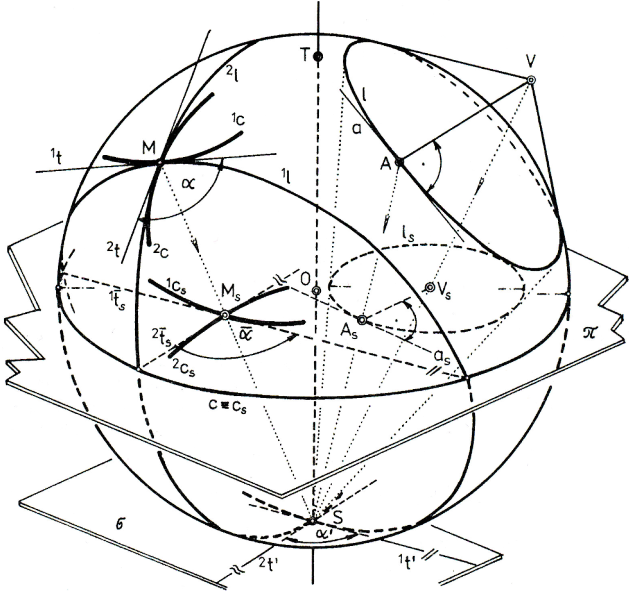
Gerhard Mercator: *mapa světa*, 1595





Joan Blaeu: *mapa světa*, 1662

Stereografická projekce vznikne promítáním ze středu  $S$ , který leží na povrchu globu a sice do roviny kolmé ke spojnici  $SO$ . Průmětnu umístíme buď jako tečnou rovinu, dotýkající se v bodě  $T \in SO$  (protilehlém k bodu  $S$ ) nebo volíme průmětnu přímo středem  $O$  globu.



## Věta

*Stereografická projekce je úhlojevná.*

Její výhodou je snadné a rychlé sestavení kartografické sítě.

## Věta

*Stereografický průmět  $l_S$  každé kružnice  $l$ , ležící na globu a neprocházející středem  $S$ , je opět kružnice.*

Tuto větu v roce 1817 doplnil N. Chasles následovně:

## Věta

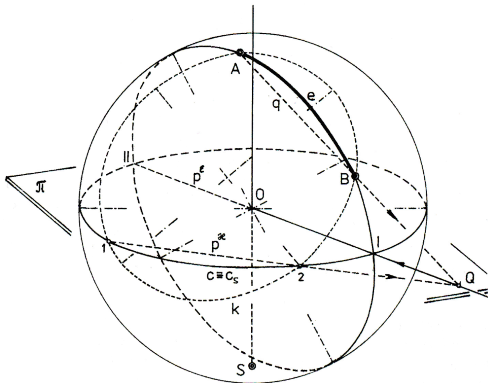
*Střed  $V_S$  kružnice  $l_S$  je stereografickým průmětem vrcholu  $V$  rotační kuželové plochy, která se dotýká globu podél kružnice  $l$ .*

## Definice

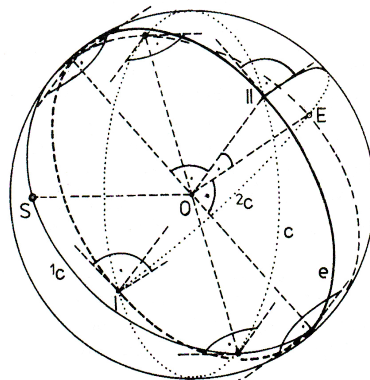
Nejkratší spojnice dvou bodů  $A, B$  glóbu (kulové plochy) je tzv. **ortodroma**. Je to kratší část hlavní kružnice určené oběma body.

## Definice

Koncové body  $E, \bar{E}$  průměru kulové plochy, kolmého k rovině  $\varepsilon$  hlavní kružnice  $e$  se nazývají **póly hlavní kružnice**.



Konstrukce ortodromy



Ortodroma  $e$  a její pól  $E$

## Příklad 12.1.1

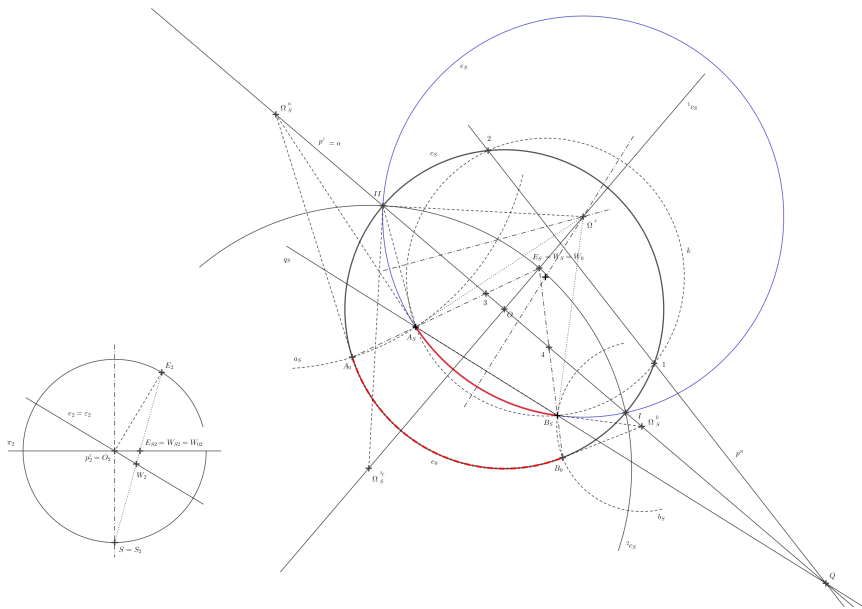
Ve stereografické projekci jsou dány průměty  $A_S$ ,  $B_S$  bodů  $A$ ,  $B$  na povrchu kulové plochy. Sestrojte průmět  $e_S$  ortodromy, která těmito body prochází.  $c_S = (O=[0;0], r = 45 \text{ mm})$ ,  $A = [-25, -5]$ ,  $B = [15; -30]$ .

## Příklad 12.1.2

Sestrojte průmět  $E_S$  pólu  $E$  příslušného k ortodromě  $e$ .

## Příklad 12.1.3

Sestrojte skutečnou délku oblouku  $\widehat{A_S B_S}$  ortodromy mezi body  $A$ ,  $B$ .

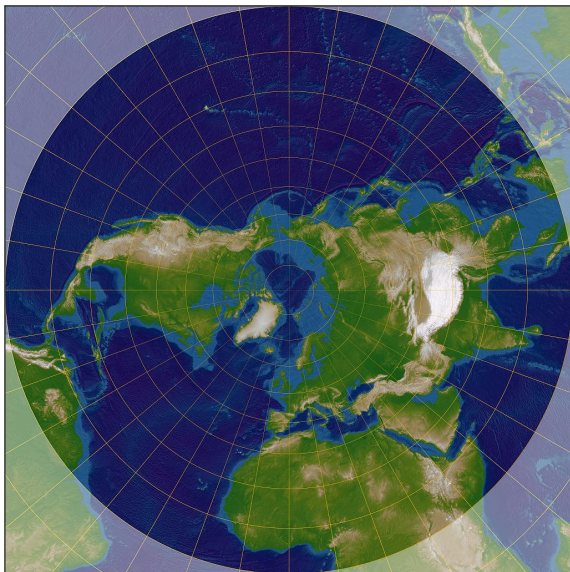




- Střed  $S$  projekce volíme v pólu  $\bar{P}$  a tečnou rovinu  $\tau$  s dotykovým bodem v pólu  $P$  jako stereografickou průmětnu  $\pi$ .
- Poledníky se promítají do přímkového svazku o středu  $T_S = P_S$  o rovnicích  $y = x \cdot \operatorname{tg} \lambda$ .
- Rovnoběžky se zobrazují do soustředných kružnic o rovnicích  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , kde  $\rho = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = 2r \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right)$ .
- Se vzrůstající pólovou vzdáleností se rozestupy mezi rovnoběžkami zvětšují až poloměr kružnice zobrazující rovník nabude hodnoty  $2r$ .

- Souřadnice  $x$ ,  $y$  každého obrazu  $M_S$  bodu  $M = [\lambda, \varphi]$  globu lze vyjádřit rovnicemi:

$$x = \rho \cdot \cos \lambda = 2r \cdot \cos \lambda \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right),$$
$$y = \rho \cdot \sin \lambda = 2r \cdot \sin \lambda \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right).$$



## Definice

Čáry, protínající všechny poledníky (a tudíž i rovnoběžky) na globu pod konstantním úhlem, se nazývají **loxodromy**.

## Věta

*Polárním stereografickým průmětem loxodromy je logaritmická spirála.*

Položme kladnou poloosu  $x$  ve směru  $\overrightarrow{P_S Q_S}$ . Polární souřadnice bodu  $Q = [\lambda_0, \rho_0]$ . K voleným hodnotám  $\lambda$  (např. kvůli poledníkům po  $30^\circ$ ), úhel  $\alpha$  je konstantně dán, snadno vypočítáme z rovnice

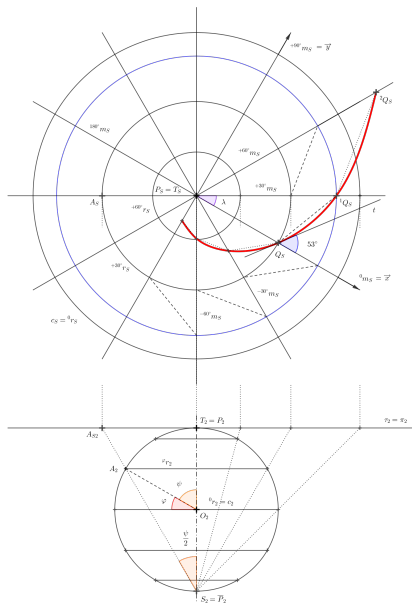
$$\rho = \rho_0 \cdot e^{\frac{\lambda}{\operatorname{tg} \alpha}}$$

pro danou čáru  $l_S$  hodnoty  $\rho$ , příslušné k voleným hodnotám  $\lambda$ .

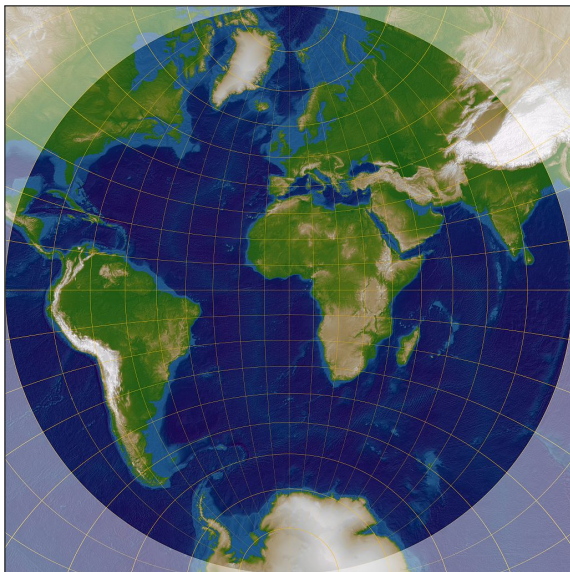
## Příklad 12.2

V polární stereografické projekci sestrojte průmět loxodromy. Poloměr globu  $r = 26$  mm.

$$\begin{aligned} \alpha &= 53^\circ, \lambda = 30^\circ \\ \operatorname{tg} \alpha &= 1,327044822 \\ \frac{\lambda}{\operatorname{tg} \alpha} &= 0,394559978 \\ e^{\frac{\lambda}{\operatorname{tg} \alpha}} &= 1,483731173 \\ \rho_0 &= 3 \\ \rho_1 &= \rho_0 \cdot e^{\frac{\lambda}{\operatorname{tg} \alpha}} = 4,451193519 \end{aligned}$$



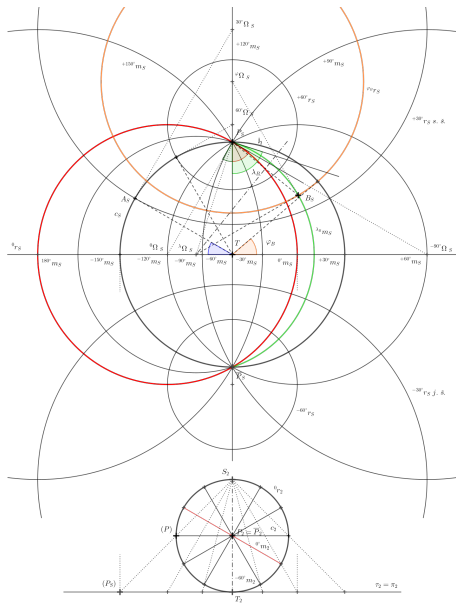
- V poloze příčné se zobrazí rovník a středový poledník jako přímky vzájemně na sebe kolmé, ostatní poledníky a rovnoběžky jako kruhové oblouky.
- Soustava poledníků  $\sum_S^m$  se zobrazuje do soustavy částí kružnic, procházejících  $P_S$  a  $\overline{P_S}$ . Středů  $\Omega_S^\lambda$  obrazů všech poledníků leží na ose úsečky  $P_S\overline{P_S}$  a k jejich určení stačí využít tečen a normál k poledníkům v obraze  $P_S$  pólu  $P$ .
- Soustava rovnoběžek  $\sum_S^r$  se promítne do hyperbolického svazku kružnic, ve kterém je obrazem rovníku osa úsečky  $P_S\overline{P_S}$ . Obrazy ostatních rovnoběžek jsou kružnice se středy  $\Omega_S^\varphi$  ležícími na spojnici  $P_S\overline{P_S}$ .





## Příklad 12.3

Sestrojte rovníkovou stereografickou projekci globu pro střed mapy  $T = [\lambda = 60^\circ \text{z.d.}, \varphi = 0^\circ]$ . Poloměr globu  $r = 15 \text{ mm}$ .



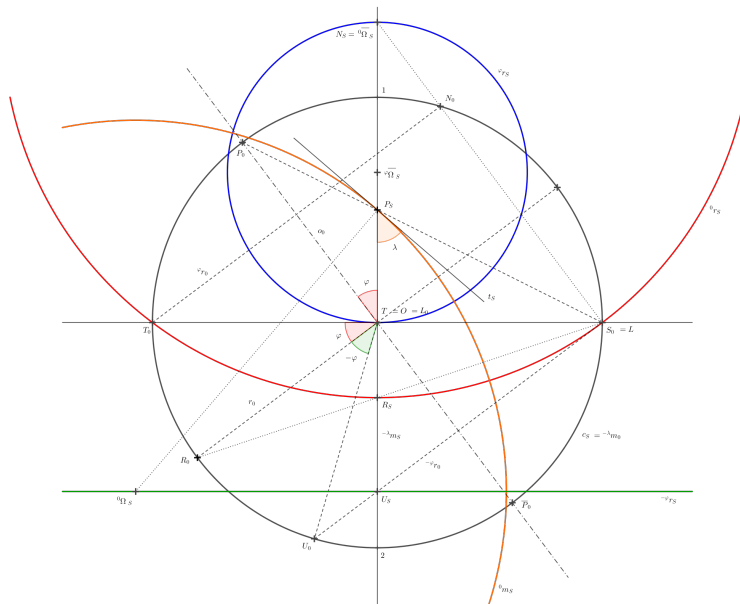
- Střed mapy  $T$  musí mít zeměpisnou šířku  $\varphi \in (0^\circ, \pm 90^\circ)$ .
- Soustavy poledníků  $\Sigma^m$  a rovnoběžek  $\Sigma^r$  se promítají do svazků kružnic  $\Sigma_S^m$  a  $\Sigma_S^r$ , kromě poledníku a rovnoběžky procházející středem promítání  $S$ . Jejich stereografické obrazy jsou dvě na sebe kolmé přímky, procházející středem mapy  $T = [\lambda, \varphi]$ , přičemž obrazem poledníku  $^{\lambda}m$  je spojnice  $P_S \overline{P_S}$  a její osa je obrazem rovnoběžky  $^{-\varphi}r$ .



## Příklad 12.4

Je dán stereografický obraz  $c_S$  hlavní kružnice  $c$  globu, ležící v rovině rovnoběžné se stereografickou průmětnou a obraz  $P_S$  severního pólu  $P$ .  $c_S = (T = [0; 0], r = 50 \text{ mm})$

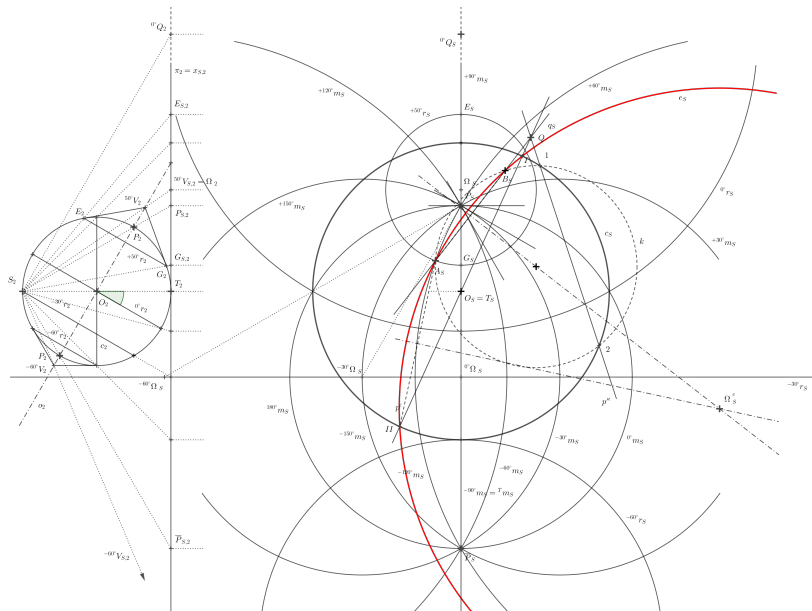
1. Určení zeměpisnou šířku  $\varphi$  středu  $T_S$  mapy.
2. Narýsujte průmět rovníku  $^0r_S$ .
3. Sestrojte průmět  $^\varphi r_S$  rovnoběžky, která prochází bodem  $T$ .
4. Sestrojte průmět  $^{-\varphi} r_S$  rovnoběžky, přímky, jdoucí středem  $S$  promítání.
5. Sestrojte průmět poledníku, který je dán svou tečnou  $t_S$  s dotykovým bodem v  $P_S$ .



## Příklad 12.5

Stereografická projekce je určena středem  $T = [\lambda = 90^\circ \text{z.d.}, \varphi = 30^\circ \text{s.š.}]$  mapy, poloměrem  $r = 23 \text{ mm}$  globu.

1. Sestrojte kartografickou síť  $\Sigma^m, \Sigma^r$  po 10 stupních.
2. Zobrazte obrysy kontinentů.
3. Zvolte dva body  $A_S, B_S$  a spojte je ortodromou  $e_S$ .





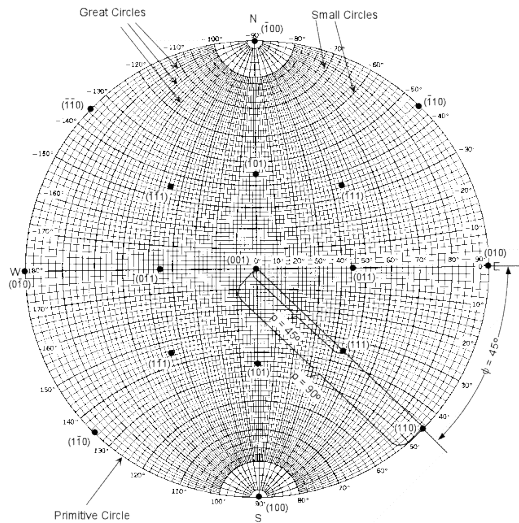




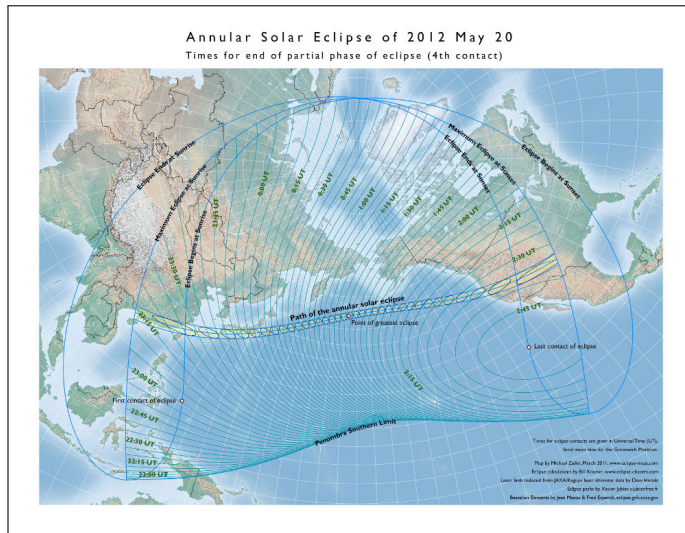
*Praha, Staroměstská radnice s orlojem.*



*Les Champs Elysées, na severozápadě Eiffelova věž, Paříž, Francie.*



Stereogramy – využívá se kvůli zachování úhlů mezi stěnami krystalů.



Názorné zobrazování pohybů větších celků či planet

# Děkuji za pozornost!

