



Stereografická projekce

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura



- Talanda, Pavel: *Deskriptivní geometrie, vybrané kapitoly z kartografie pro obor geodézie*, Fakulta stavební VUT, Akademické nakladatelství CERM, Brno 2014.

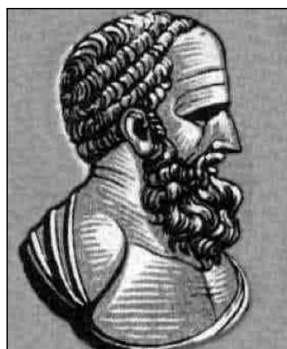
- Autorský kolektiv Ústavu matematiky a deskriptivní geometrie FaSt VUT v Brně: *Sbírka řešených příkladů z konstruktivní geometrie*, Fakulta stavební VUT v Brně, 2021.

<https://www.geogebra.org/m/ejhn4jay>



- Černý, Jaroslav – Kočandrllová, Milada: *Konstruktivní geometrie*, Vydavatelství ČVUT, Praha 1998.
- Drábek, Karel – Harant, František – Setzer, Ota: *Deskriptivní geometrie II*, ANTL/ALFA, Praha 1979.
- Finda, Jaromír: *Kartografická zobrazení*, Diplomová práce, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita v Brně, Brno 2005. <https://is.muni.cz/th/dv9gw/>.
- Juklová Lenka: *Aplikace deskriptivní geometrie, Základy kartografie a cyklografie*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 2013.
- Klapka Jiří - Piska, Rudolf - Zezula, Jaromír: *Deskriptivní geometrie, II. díl (se základy kartografie a stereotomie)*, Vysoké učení technické, Fakulta inženýrského stavitelství, SNTL, Praha 1953.

- Medek, Václav – Zámožík, Jozef: *Konstruktívna geometria pre technikov*, ALFA, Bratislava 1978.
- Nguyen, Viet Bach: *Kartografické projekce*, Ročníková práce z deskriptivní geometrie, Gymnázium Christiana Dopplera, Praha 2012. <http://www.machu.euweb.cz/g-nguyen.pdf>.
- Piska, Rudolf: *Úvod do geometrie kartografických zobrazení*, Fakulta stavební VUT v Brně, Ediční středisko VUT, Brno 1975.
- Pohanková, Dana: *Geometrická azimutální zobrazení v kartografii*, Bakalářská práce, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita v Brně, Brno 2014. <https://is.muni.cz/th/i5oap/>.
- Švec, Rudolf: *Kartografické zobrazovací metody*, Vyšší pedagogická škola České BUdějovice, SPN, n.p., 1957.



- Stereografickou projekci začal používat Hipparchos z Nicee (180 – 125 př. n. l.), který je považován za zakladatele matematického zeměpisu. Kromě jiného jako první popisoval polohu bodu na zemi zeměpisnými souřadnicemi.
- V roce 1613 se zavádí název “stereographique” (François d’Aiguillon)



Ilustrace od Petera Paula Rubense ke knize od Françoise d'Aguilona: *Opticorum libri sex philosophis juxta ac mathematicis utiles*

Stereografická projeje

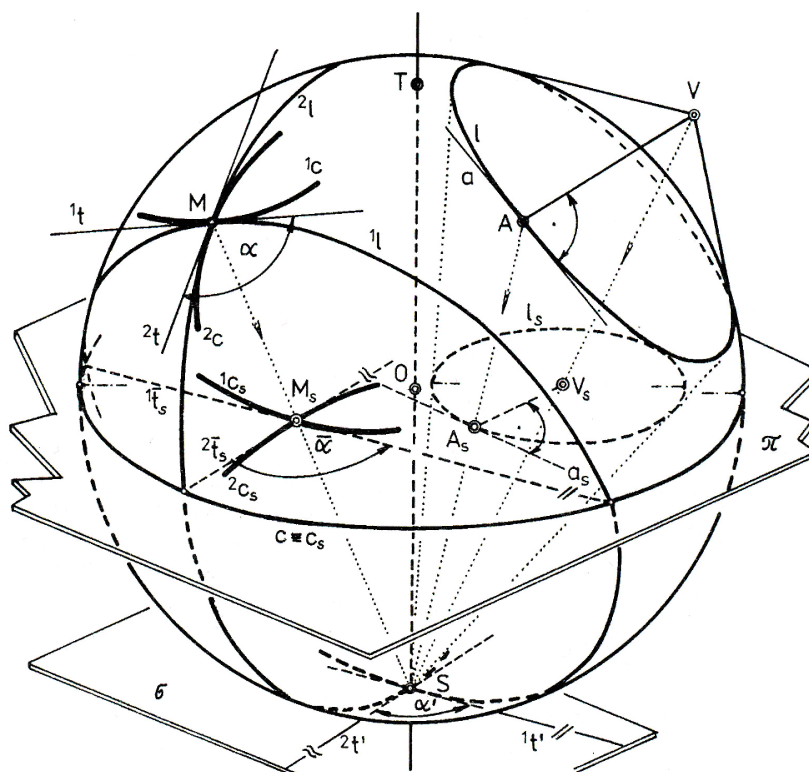


Gerhard Mercator: *mapa světa, 1595*



Joan Blaeu: *mapa světa*, 1662

Stereografická projekce vznikne promítáním ze středu S , který leží na povrchu globu a sice do roviny kolmé ke spojnici SO . Průmětnu umístíme buď jako tečnou rovinu, dotýkající se v bodě $T \in SO$ (protilehlém k bodu S) nebo volíme průmětnu přímo středem O globu.



Stereografická projekce

Věta

Stereografická projekce je úhlojevná.

Její výhodou je snadné a rychlé sestavení kartografické sítě.

Věta

Stereografický průmět l_s každé kružnice l , ležící na globu a neprocházející středem S , je opět kružnice.

Tuto větu v roce 1817 doplnil N. Chasles následovně:

Věta

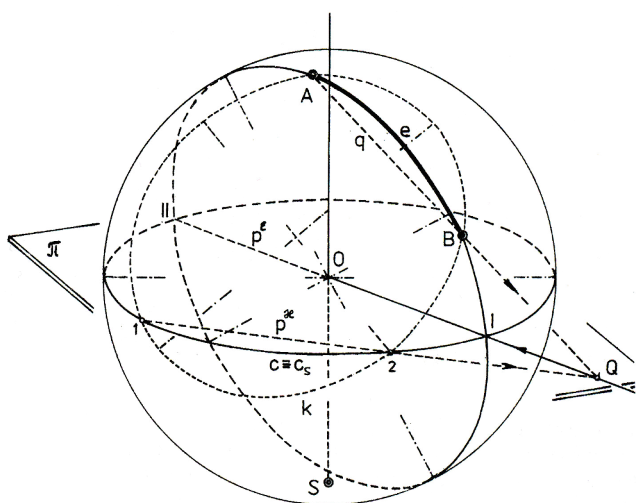
Střed V_s kružnice l_s je stereografickým průmětem vrcholu V rotační kuželové plochy, která se dotýká globu podél kružnice l .

Definice

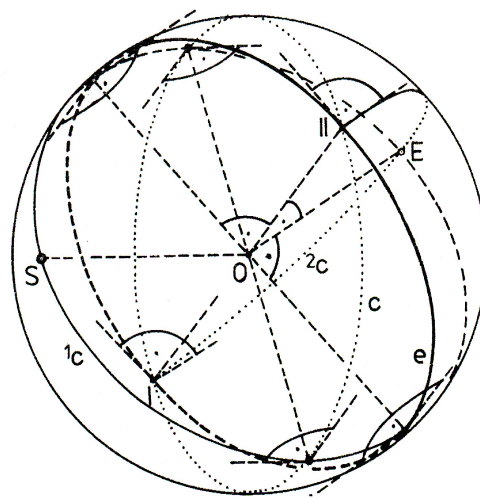
Nejkratší spojnice dvou bodů A, B glóbu (kulové plochy) je tzv. **ortodroma**. Je to kratší část hlavní kružnice určené oběma body.

Definice

Koncové body E, \bar{E} průměru kulové plochy, kolmého k rovině ε hlavní kružnice e se nazývají **póly hlavní kružnice**.



Konstrukce ortodromy



Ortodroma e a její pól E

Příklad 12.1.1

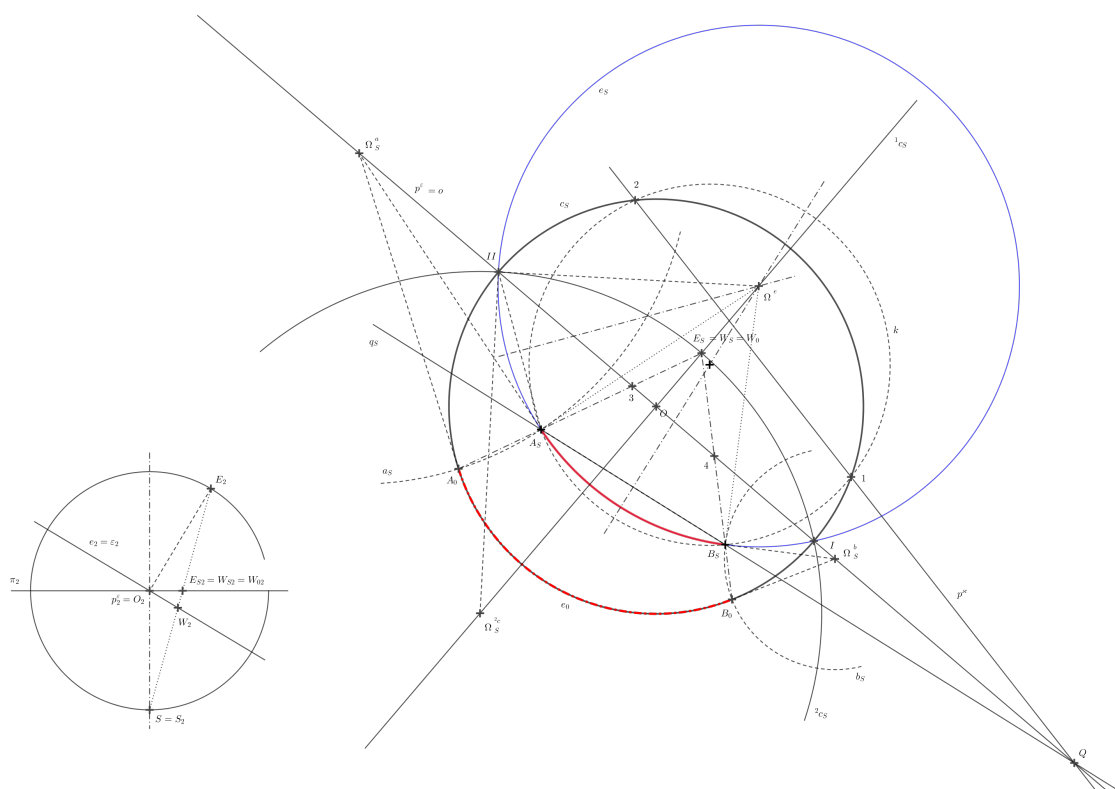
Ve stereografické projekci jsou dány průměty A_S, B_S bodů A, B na povrchu kulové plochy. Sestrojte průmět e_S ortodromy, která těmito body prochází. $c_S = (O=[0;0], r = 45 \text{ mm})$, $A = [-25, -5]$, $B = [15; -30]$.

Příklad 12.1.2

Sestrojte průmět E_S pólu E příslušného k ortodromě e .

Příklad 12.1.3

Sestrojte skutečnou délku oblouku $\widehat{A_S B_S}$ ortodromy mezi body A, B .

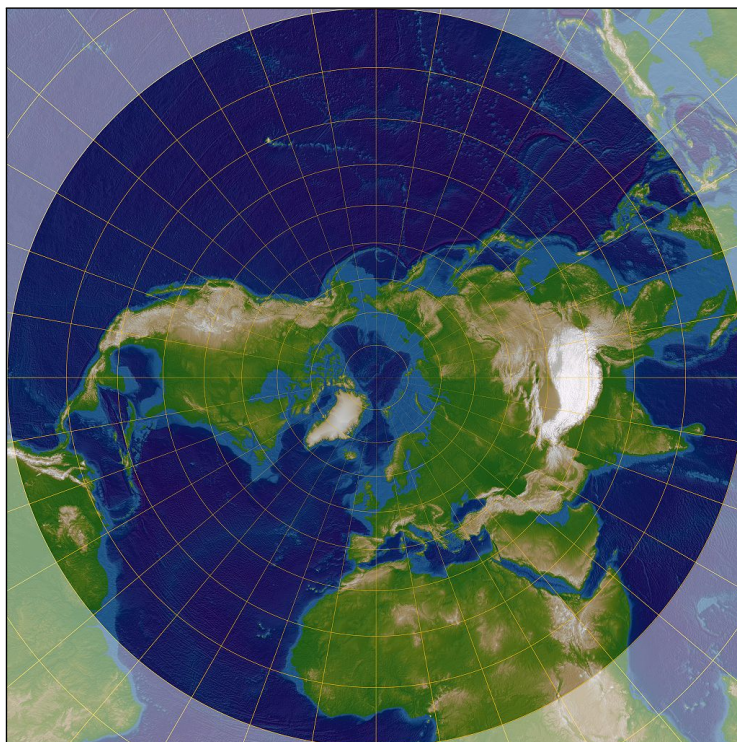


- Střed S projekce volíme v pólu \bar{P} a tečnou rovinu τ s dotykovým bodem v pólu P jako stereografickou průmětnu π .
- Poledníky se promítají do přímkového svazku o středu $T_S = P_S$ o rovnicích $y = x \cdot \operatorname{tg} \lambda$.
- Rovnoběžky se zobrazují do soustředných kružnic o rovnicích $x^2 + y^2 = \rho^2$, kde $\rho = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = 2r \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right)$.
- Se vzrůstající pólovou vzdáleností se rozestupy mezi rovnoběžkami zvětšují až poloměr kružnice zobrazující rovník nabude hodnoty $2r$.

- Souřadnice x , y každého obrazu M_S bodu $M = [\lambda, \varphi]$ globu lze vyjádřit rovnicemi:

$$x = \rho \cdot \cos \lambda = 2r \cdot \cos \lambda \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$y = \rho \cdot \sin \lambda = 2r \cdot \sin \lambda \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right).$$



Definice

Čáry, protínající všechny poledníky (a tudíž i rovnoběžky) na globu pod konstantním úhlem, se nazývají **loxodromy**.

Věta

Polárním stereografickým průmětem loxodromy je logaritmická spirála.

Položme kladnou poloosu x ve směru $\overrightarrow{P_S Q_S}$. Polární souřadnice bodu $Q = [\lambda_0, \rho_0]$. K voleným hodnotám λ (např. kvůli poledníkům po 30°), úhel α je konstantně dán, snadno vypočítáme z rovnice

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{\frac{\lambda}{\operatorname{tg} \alpha}}$$

pro danou čáru l_S hodnoty ρ , příslušné k voleným hodnotám λ .

Příklad 12.2

V polární stereografické projekci sestrojte průmět loxodromy. Poloměr globu $r = 26$ mm.

$$\alpha = 53^\circ, \lambda = 30^\circ$$

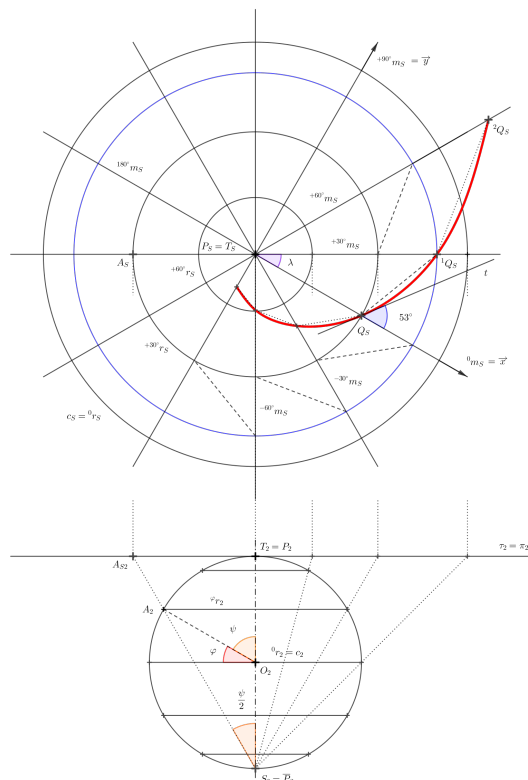
$$\operatorname{tg} \alpha = 1,327044822$$

$$\frac{\lambda}{\operatorname{tg} \alpha} = 0,394559978$$

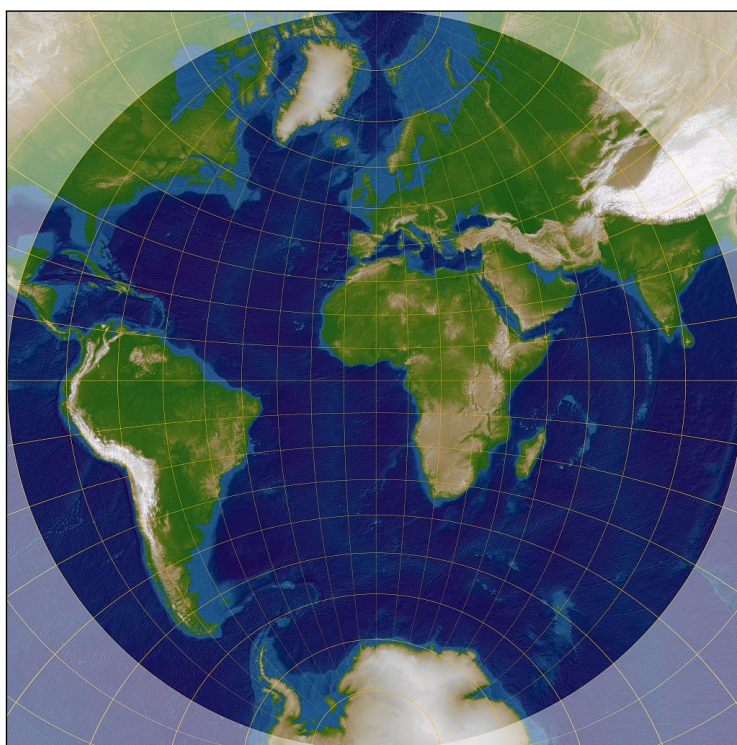
$$e^{\frac{\lambda}{\operatorname{tg} \alpha}} = 1,483731173$$

$$\rho_0 = 3$$

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot e^{\frac{\lambda}{\operatorname{tg} \alpha}} = 4,451193519$$

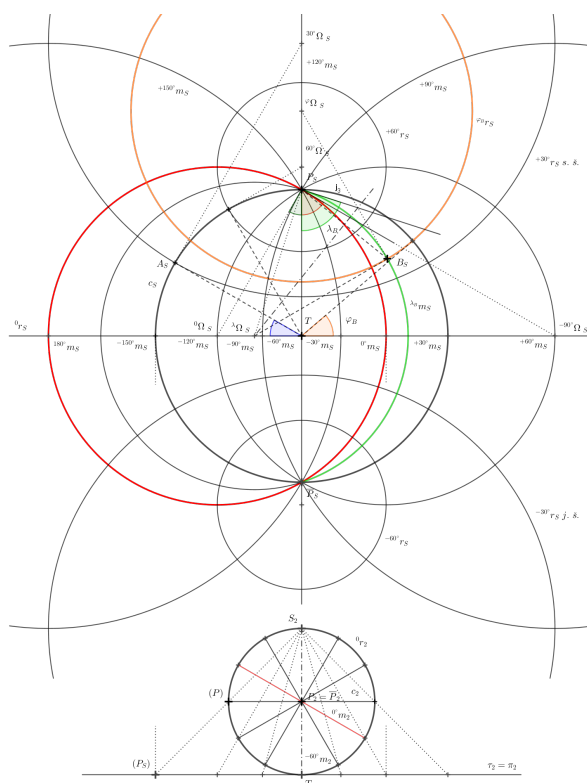


- V poloze příčné se zobrazí rovník a středový poledník jako přímky vzájemně na sebe kolmé, ostatní poledníky a rovnoběžky jako kruhové oblouky.
- Soustava poledníků Σ_S^m se zobrazuje do soustavy částí kružnic, procházejících P_S a $\overline{P_S}$. Středů Ω_S^λ obrazů všech poledníků leží na ose úsečky $P_S\overline{P_S}$ a k jejich určení stačí využít tečen a normál k poledníkům v obraze P_S pólu P .
- Soustava rovnoběžek Σ_S^r se promítne do hyperbolického svazku kružnic, ve kterém je obrazem rovníku osa úsečky $P_S\overline{P_S}$. Obrazy ostatních rovnoběžek jsou kružnice se středy Ω_S^φ ležícími na spojnici $P_S\overline{P_S}$.



Příklad 12.3

Sestrojte rovníkovou stereografickou projekci globu pro střed mapy $T = [\lambda = 60^\circ \text{z.d.}, \varphi = 0^\circ]$. Poloměr globu $r = 15 \text{ mm}$.



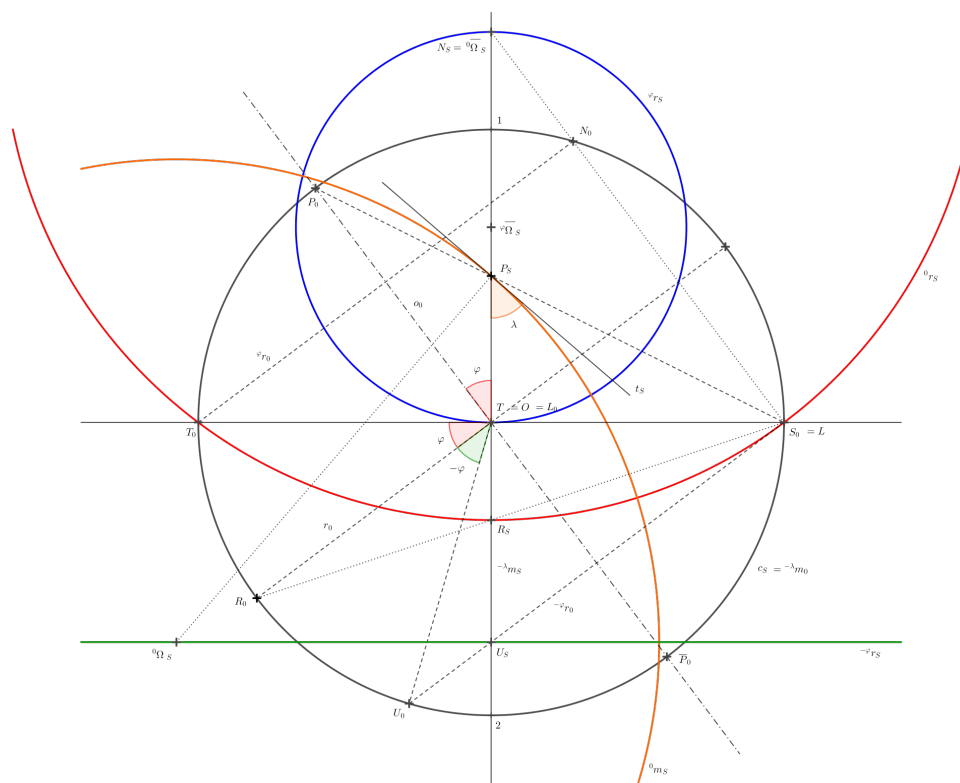
- Střed mapy T musí mít zeměpisnou šířku $\varphi \in (0^\circ, \pm 90^\circ)$.
- Soustavy poledníků Σ^m a rovnoběžek Σ^r se promítají do svazků kružnic Σ_S^m a Σ_S^r , kromě poledníku a rovnoběžky procházející středem promítání S . Jejich stereografické obrazy jsou dvě na sebe kolmé přímky, procházející středem mapy $T = [\lambda, \varphi]$, přičemž obrazem poledníku ${}^\lambda m$ je spojnice $P_S \overline{P_S}$ a její osa je obrazem rovnoběžky ${}^{-\varphi} r$.



Příklad 12.4

Je dán stereografický obraz c_S hlavní kružnice c globu, ležící v rovině rovnoběžné se stereografickou průmětnou a obraz P_S severního pólu P . $c_S = (T = [0;0], r = 50 \text{ mm})$

1. Určení zeměpisnou šířku φ středu T_S mapy.
2. Narýsujte průmět rovníku 0r_S .
3. Sestrojte průmět φr_S rovnoběžky, která prochází bodem T .
4. Sestrojte průmět $-\varphi r_S$ rovnoběžky, přímky, jdoucí středem S promítání.
5. Sestrojte průmět poledníku, který je dán svou tečnou t_S s dotykovým bodem v P_S .

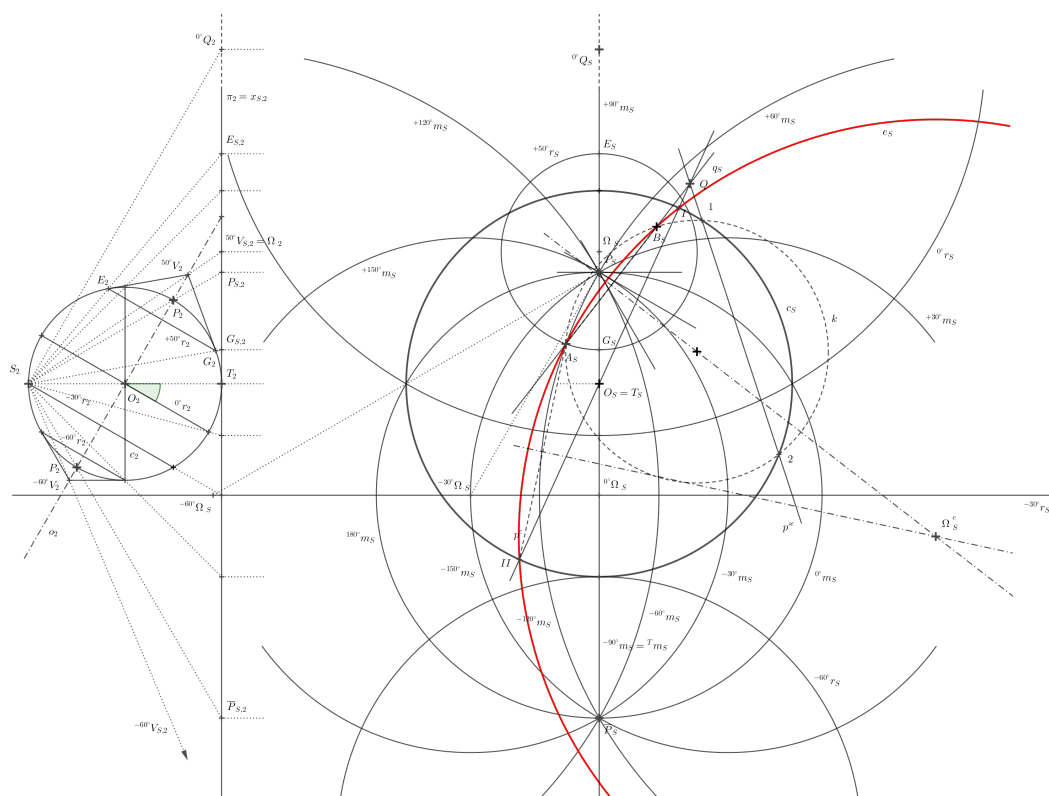


Příklad 12.5

Stereografická projekce je určena středem $T = [\lambda = 90^\circ \text{z.d.}, \varphi = 30^\circ \text{s.š.}]$ mapy, poloměrem $r = 23 \text{ mm}$ globu.

1. Sestrojte kartografickou síť Σ^m, Σ^r po 10 stupních.
2. Zobrazte obrysy kontinentů.
3. Zvolte dva body A_S, B_S a spojte je ortodromou e_S .

Rovníková stereografická projekce

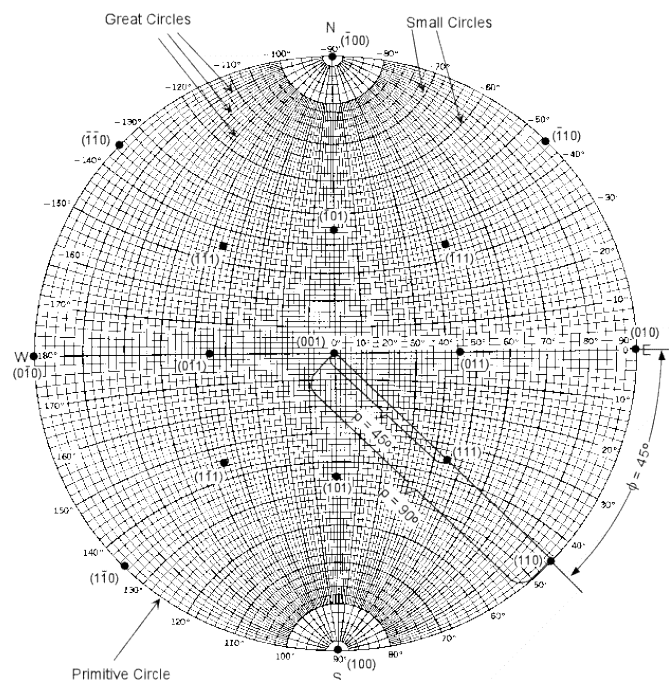




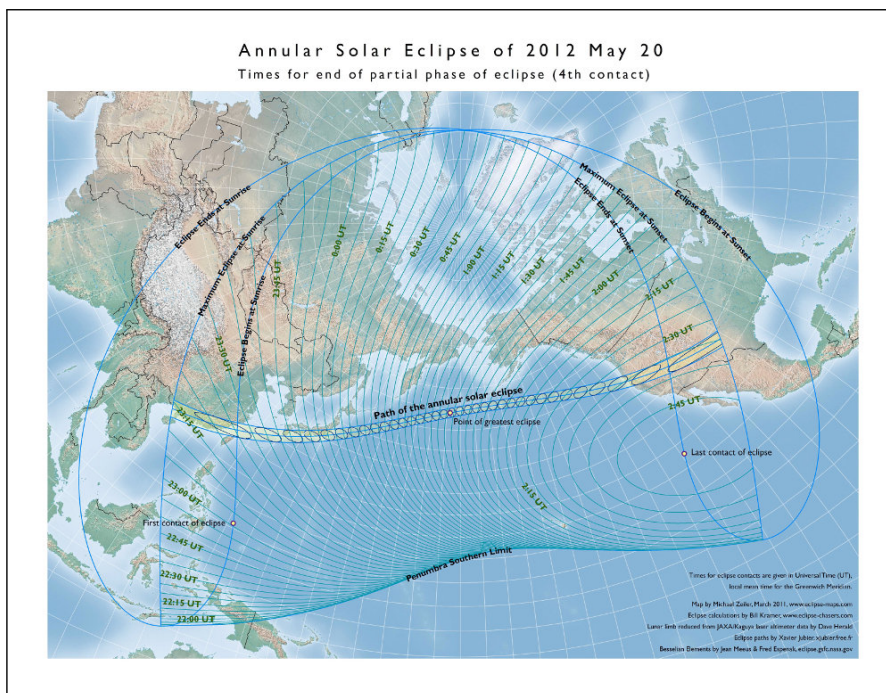
Praha, Staroměstská radnice s orlojem.



Les Champs Elysées, na severozápadě Eiffelova věž, Paříž, Francie.



Stereogramy – využívá se kvůli zachování úhlů mezi stěnami krystalů.



Názorné zobrazování pohybů větších celků či planet

Děkuji za pozornost!

