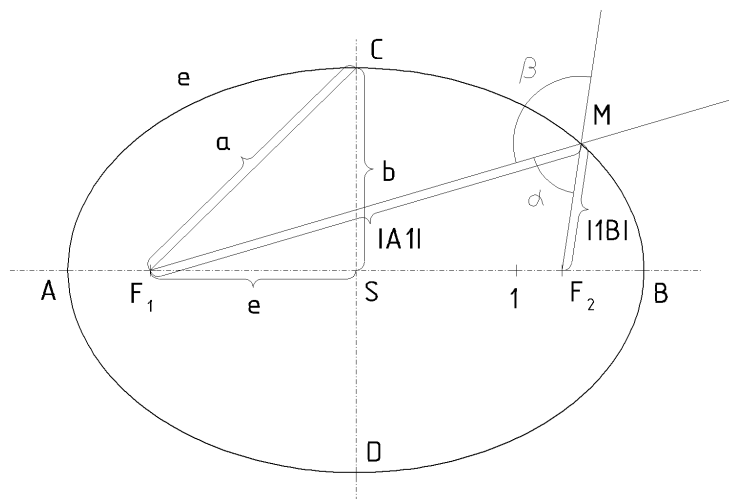


KUŽELOSEČKY

1.1 Elipsa

Definice: Elipsa \mathcal{E} je množina všech bodů v \mathbb{E}_2 , které mají od dvou pevných (různých) bodů v \mathbb{E}_2 , zvaných ohniska (značíme F_1, F_2), stálý součet vzdáleností rovný $2a$, který je větší než vzdálenost obou ohnisek.



$M \in \mathcal{E} \Rightarrow |MF_1| + |MF_2| = 2a$
 MF_1, MF_2 : průvodiče
 A, B : hlavní vrcholy \mathcal{E}
 C, D : vedlejší vrcholy \mathcal{E}
 $AB \cap CD = S$: střed elipsy \mathcal{E}
 a : velikost hlavní poloosy
 b : velikost vedlejší poloosy
 $|F_1S| + |F_2S| = e$: excentricita (výstřednost)
 $e^2 + b^2 = a^2$: charakteristický $\Delta \mathcal{E}$
 \mathcal{E} má dvě osy souměrnosti:
 AB – hlavní osa
 CD – vedlejší osa

$M \in \mathcal{E}$: $\angle F_1MF_2$ – obsahující střed S – nazýváme *vnitřní úhel průvodičů*. K vnitřnímu úhlu průvodičů α se vedlejší úhel β nazývá *vnější úhel průvodičů*.

$M \in \mathbb{E}_2$ libovolný : $|MF_1| + |MF_2| > 2a \Rightarrow M$ je vnějším bodem elipsy \mathcal{E} .

$|MF_1| + |MF_2| < 2a \Rightarrow M$ je vnitřním bodem elipsy \mathcal{E} .

Věta_T: V každém bodě \mathcal{E} existuje právě jedna tečna. Tečna pólí vnější úhel průvodičů (tečnu značíme obvykle t , dotykový bod T). Normála n je kolmá na tečnu t v bodě T a pólí vnitřní úhel průvodičů.

Věta_P: Množina pat P kolmic spuštěných z ohnisek elipsy \mathcal{E} na její tečny je *vrcholová kružnice* $k(S, a)$.

Věta_Q: Množina bodů Q souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy \mathcal{E} (například F_1) podle jejich tečen je *řídící kružnice* se středem v druhém ohnisku (F_2) a poloměrem $r = 2a$. Přitom platí $T \in QF_2$.

Poznámka: Dvě křivky 2. stupně mají obecně 4 různé průsečíky. Jestliže dva a více bodů dvou křivek splyne, hovoříme o *soumžných bodech*.

Jestliže má kružnice s elipsou (obecně s křivkou) tři soumžné body, pak se nazývá *oskulační kružnicí*.

Jestliže má kružnice s elipsou (obecně s křivkou) čtyři soumžné body, pak se nazývá *hyperoskulační kružnicí*.

Elipsa má hyperoskulační kružnice jen ve vrcholech.

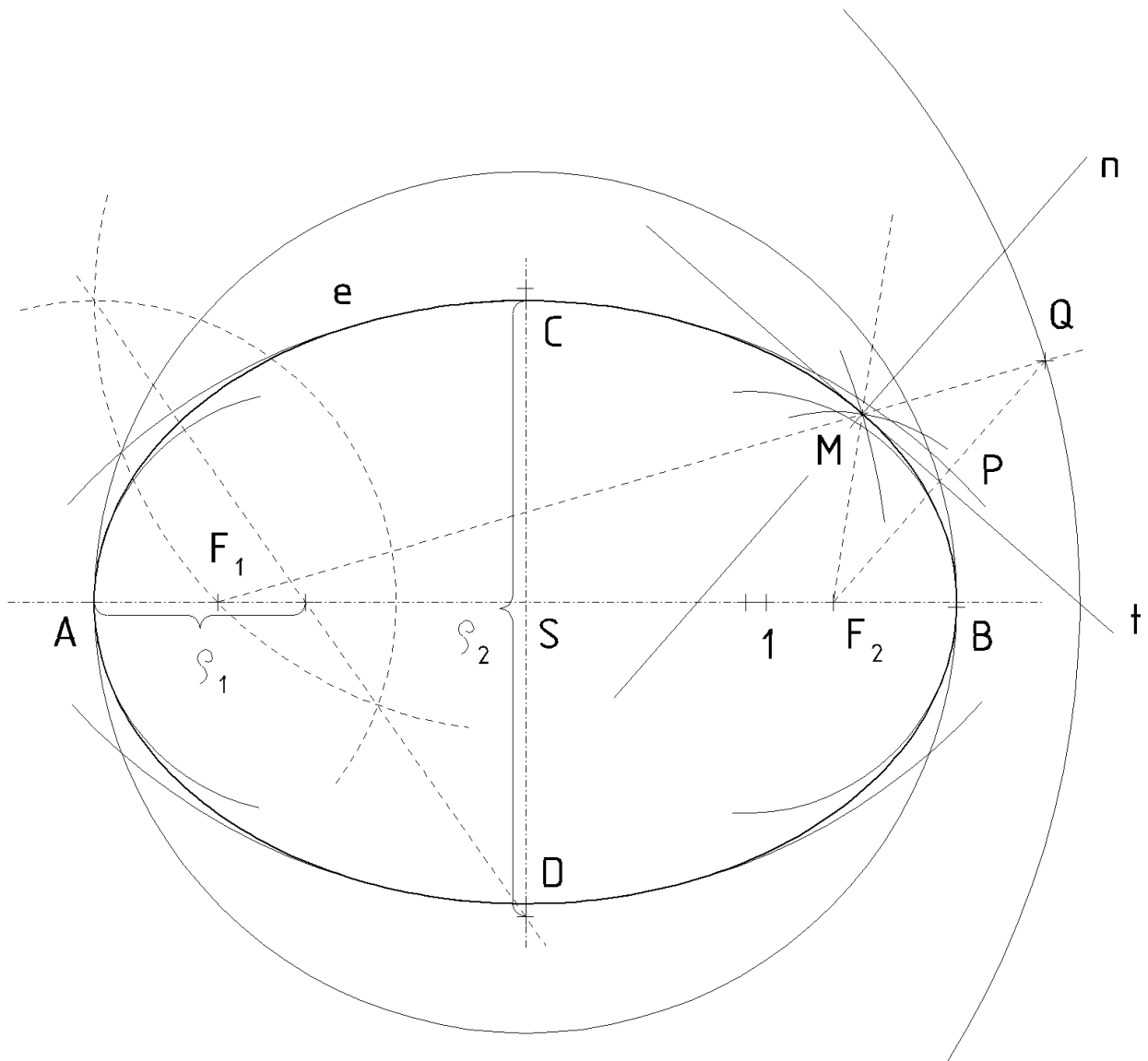
Poznámka: Máme-li elipsu zadanou například $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$, $\mathcal{E}(F_1, S, a)$, $\mathcal{E}(A, B, e)$, můžeme ji bezprostředně vyrýsovat.

Elipsa ovšem může být zadána například $\mathcal{E}(t+T, F_1, a)$, $\mathcal{E}(F_1, s^a, t_1, t_2)$, ..., kde $t+T$ značí zadání elipsy \mathcal{E} tečnou t s bodem dotyku T , s^a značí směr hlavní osy a , atd.

V tomto případě užitím vět **V_T**, **V_P**, **V_Q** nalezneme elementy vedoucí k bezprostřednímu vyrýsování elipsy.

Příklad č. 1: D: $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$, $|F_1F_2| < 2a$

S: sestrojte několik bodů elipsy, hyperoskulační kružnice, tečnu v libovolném bodě $T \in \mathcal{E}$, zkonstruuje kružnice z vět V_P, V_Q



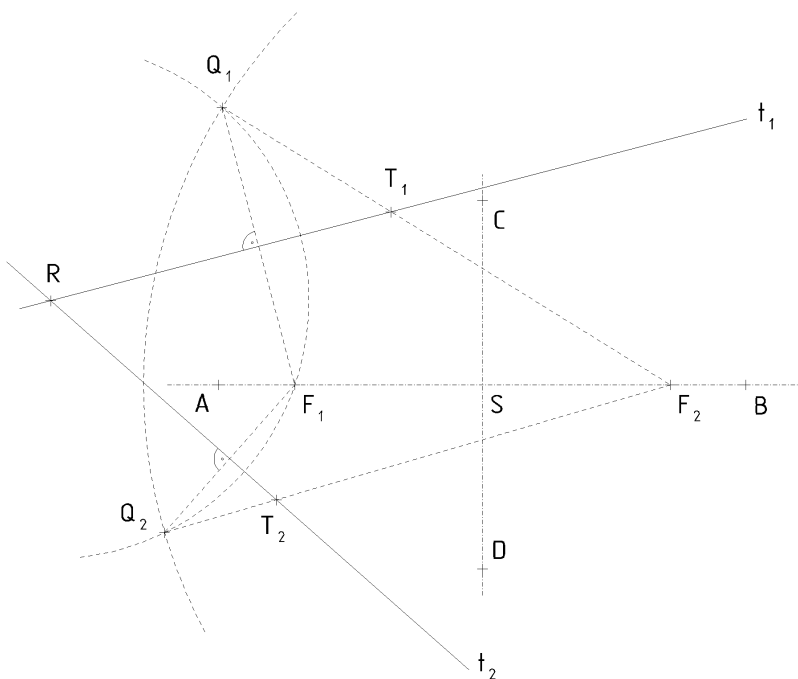
ρ_1 – poloměr hyperoskulační kružnice ve vrcholech A, B.

ρ_2 – poloměr hyperoskulační kružnice ve vrcholech C, D.

Elipsu lze v blízkém okolí vrcholů nahradit hyperoskulačními kružnicemi.

Příklad č. 2: D: $\mathcal{E}(A, B, e), R$

S: sestrojte tečny z bodu R k elipse \mathcal{E} , určete body dotyku



Konstrukce:

- 1) $k_1(F_2, 2a)$
- 2) $k_2(R, |RF_1|)$
- 3) $Q = k_1 \cap k_2$
- 4) t – osa F_1Q
- 5) $T = t \cap F_2Q$

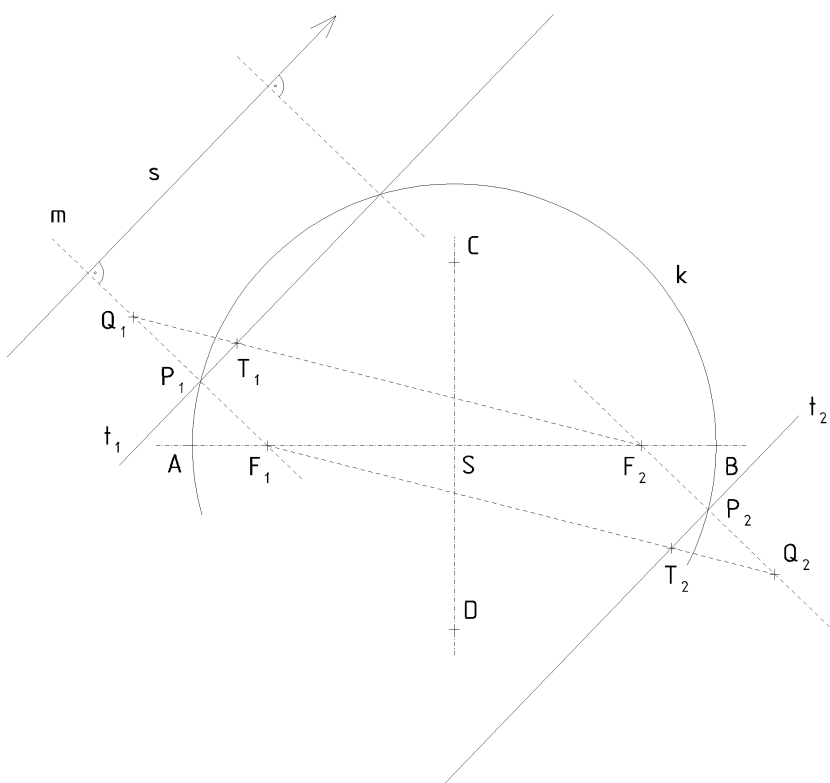
Diskuze:

Počet průsečíku $k_1 \cap k_2$ určuje počet řešení:

- R leží vně $\mathcal{E} \Rightarrow 2$ řešení
- R leží na $\mathcal{E} \Rightarrow 1$ řešení
- R leží uvnitř $\mathcal{E} \Rightarrow$ žádné řešení

Příklad č. 3: D: $\mathcal{E}(A, B, e), s$

S: sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem s k elipse \mathcal{E} , určete body dotyku



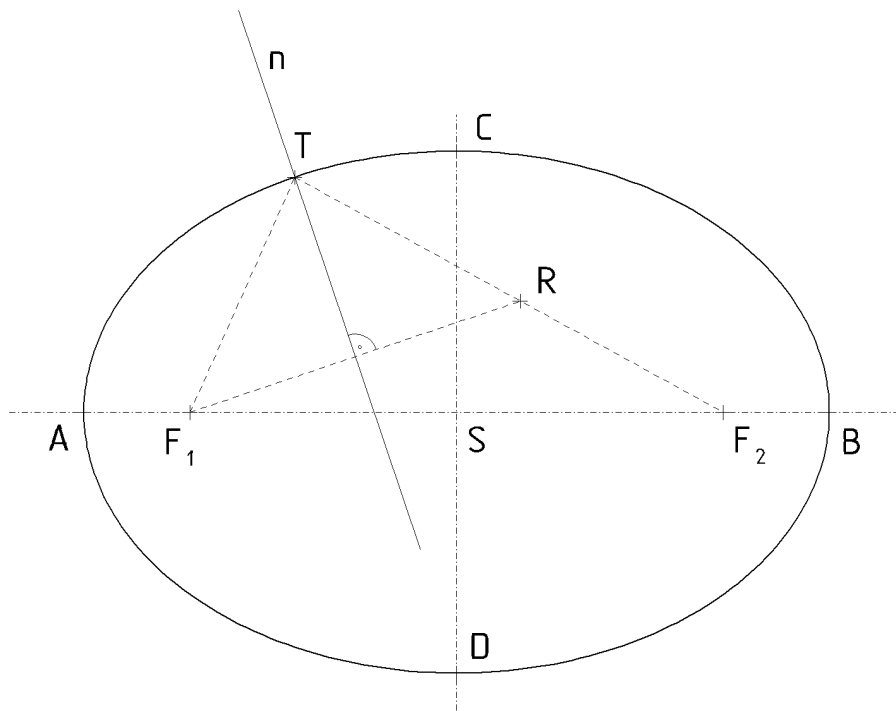
Konstrukce“

- 1) $m; F_1 \in m, m \perp s$
- 2) $k(S, a)$
- 3) $P = k \cap m$
- 4) $t; P \in t, t \parallel s$
- 5) Q je souměrně sdružený s ohniskem F_1 podle t
- 6) $T = t \cap F_2Q$

Diskuze:

Počet průsečíku $k \cap m$ určuje počet řešení – v tomto případě existují vždy dvě řešení.

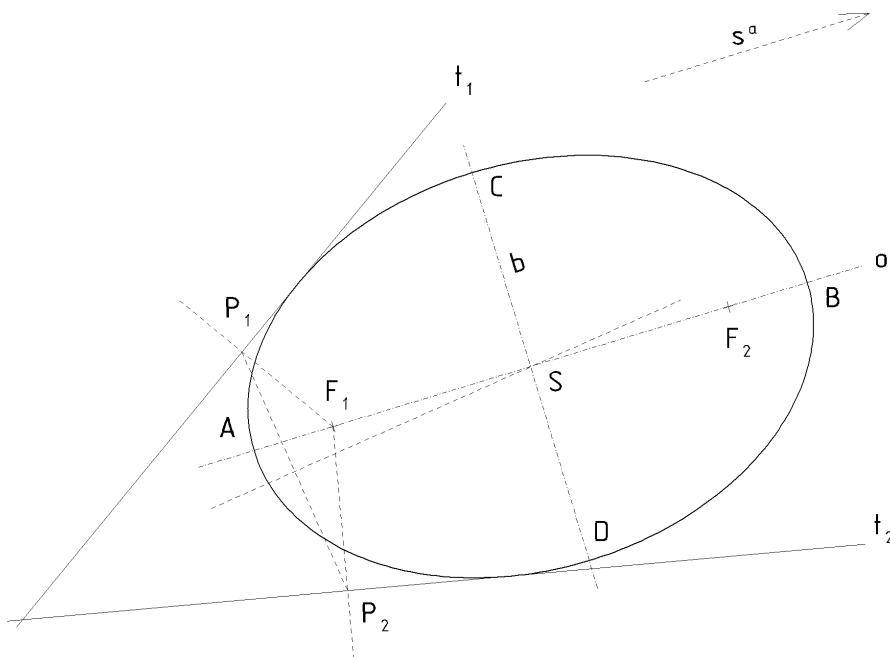
Příklad č. 4: D: $\mathcal{E}(F_1, F_2, n)$
 S: sestrojte elipsu \mathcal{E}



Konstrukce:

- 1) R ; n je osa úsečky F_1R
- 2) $T = F_2R \cap n$
- 3) $|F_1T| + |F_2T| = 2a$
- 4) $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$

Příklad č. 5: D: $\mathcal{E}(F_1, s^a, t_1, t_2)$
 S: sestrojte elipsu \mathcal{E}

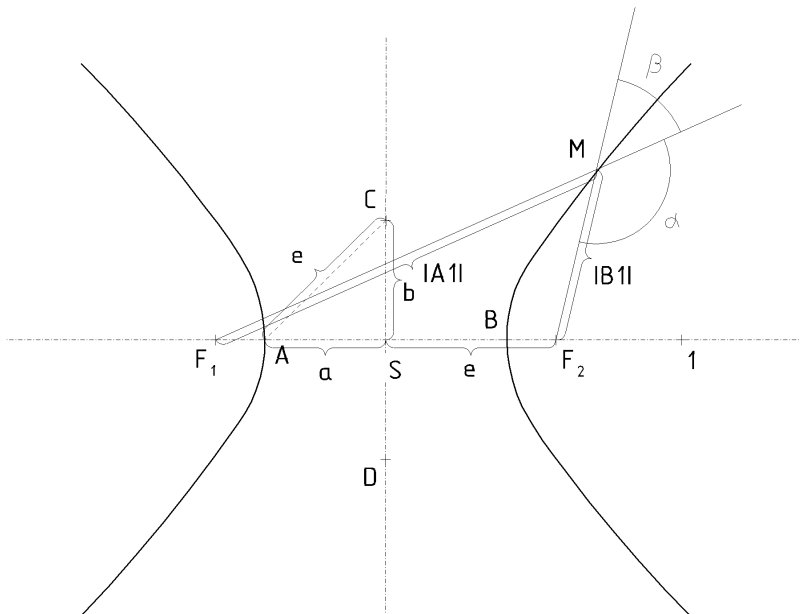


Konstrukce:

- 1) o ; $F_1 \in o$, $o \parallel s^a$
- 2) P_1 – pata kolmice z F_1 na t_1
- 3) P_2 – pata kolmice z F_1 na t_2
- 4) o_1 – osa úsečky P_1P_2
- 5) $S = o_1 \cap o$
- 6) $a = |SP_1| = |SP_2|$
- 7) $\mathcal{E}(S, F_1, a)$

1.2 Hyperbola

Definice: Hyperbola \mathcal{H} je množina všech bodů v \mathbb{E}_2 , které mají od dvou pevných (různých) bodů v \mathbb{E}_2 , zvaných ohniska (značíme F_1, F_2), stálý rozdíl vzdáleností rovný $2a$, který je menší než vzdálenost obou ohnisek.



$$M \in \mathcal{H} \Rightarrow ||MF_1| - |MF_2|| = 2a$$

$$|MF_1| - |MF_2| = 2a \text{ nebo}$$

$$|MF_2| - |MF_1| = 2a \Rightarrow$$

\mathcal{H} má dvě větve

MF_1, MF_2 : průvodiče

A, B : hlavní vrcholy \mathcal{H}

C, D : vedlejší vrcholy \mathcal{H} ,

vedlejší vrcholy C, D neleží na \mathcal{H}

$AB \cap CD = S$: střed hyperboly \mathcal{H}

a : velikost hlavní poloosy

b : velikost vedlejší poloosy

$|F_1S| + |F_2S| = e$: excentricita
(výstřednost)

$$e^2 = a^2 + b^2 : \text{charakteristický } \Delta \mathcal{H}$$

\mathcal{H} má dvě osy souměrnosti:

AB – hlavní osa

CD – vedlejší osa

$M \in \mathcal{H}$: $\angle F_1MF_2$ – obsahující střed S – nazýváme *vnější úhel průvodičů*. K vnějšímu úhlu průvodičů β se vedlejší úhel α nazývá *vnitřní úhel průvodičů*.

$M \in \mathbb{E}_2$ libovolný : $||MF_1| - |MF_2|| < 2a \Rightarrow M$ je vnějším bodem hyperboly \mathcal{H} .

$||MF_1| - |MF_2|| > 2a \Rightarrow M$ je vnitřním bodem hyperboly \mathcal{H} .

Tečna v nevlastním bodě \mathcal{H} se nazývá asymptota – hyperbola \mathcal{H} má dvě asymptoty. Asymptoty p, q jsou úhlopříčkami v obdélníku o středních příčkách AB, CD .

Hyperbola \mathcal{H} se nazývá rovnoosá $\Leftrightarrow a = b$.

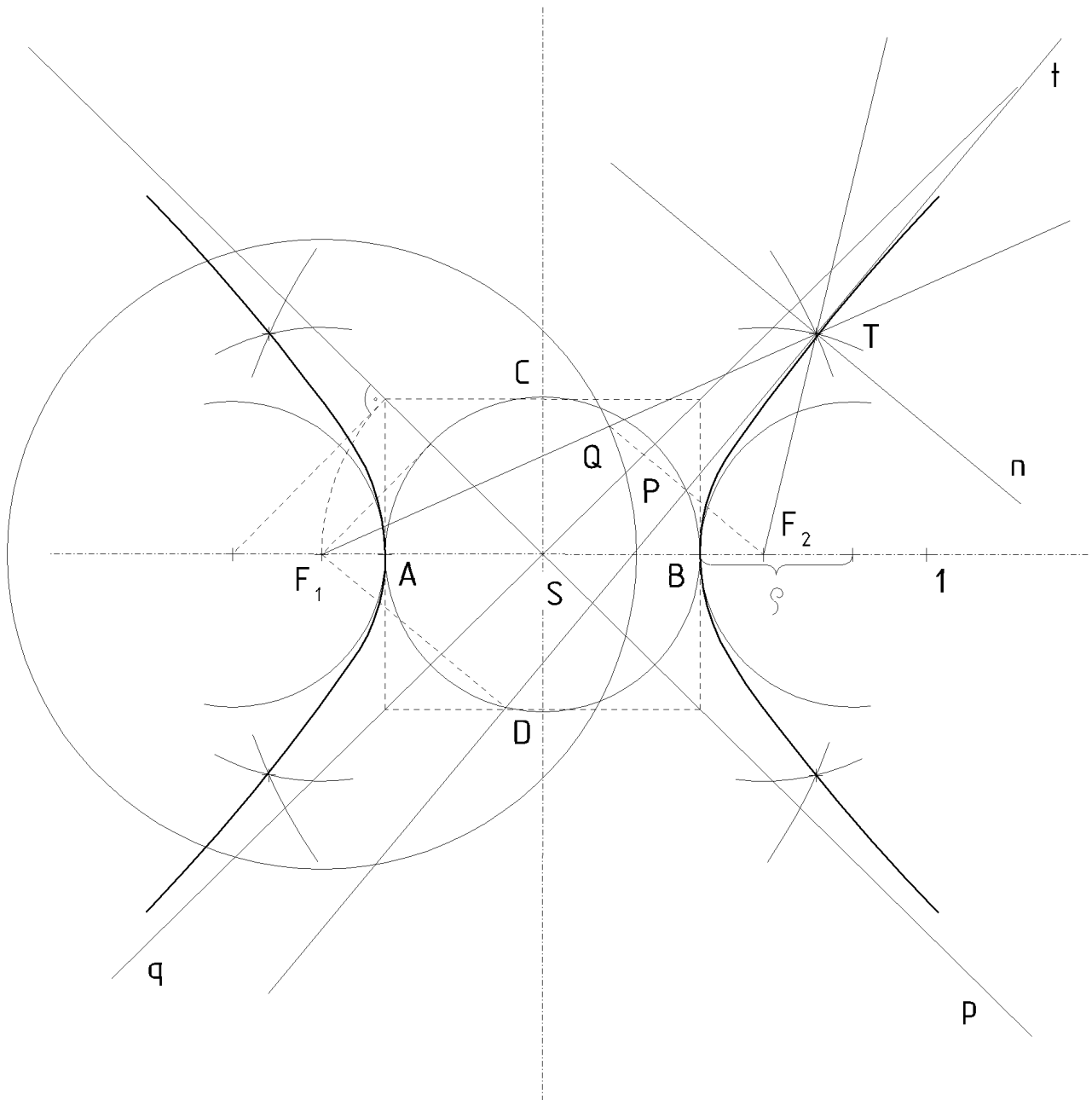
Hyperbola má hyperoskulační kružnice v hlavních vrcholech.

Věta_T: V každém bodě \mathcal{H} existuje právě jedna tečna. Tečna pólí vnější úhel průvodičů (tečnu značíme obvykle t , dotykový bod T). Normála n je kolmá na tečnu t v bodě T a pólí vnitřní úhel průvodičů.

Věta_P: Množina pat P kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly \mathcal{H} na její tečny je *vrcholová kružnice* $k(S, a)$.

Věta_Q: Množina bodů Q souměrně sdružených s jedním ohniskem hyperboly \mathcal{H} (například F_1) podle jejich tečen je *řídící kružnice* se středem v druhém ohnisku (F_2) a poloměrem $r = 2a$. Přitom platí $T \in QF_2$.

- Příklad č. 6:** D: $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$, $|F_1F_2| > 2a$
 S: sestrojte několik bodů hyperboly, hyperoskulační kružnice, tečnu v libovolném bodě
 $T \in \mathcal{H}$, zkonstruujte kružnice z vět V_P, V_Q

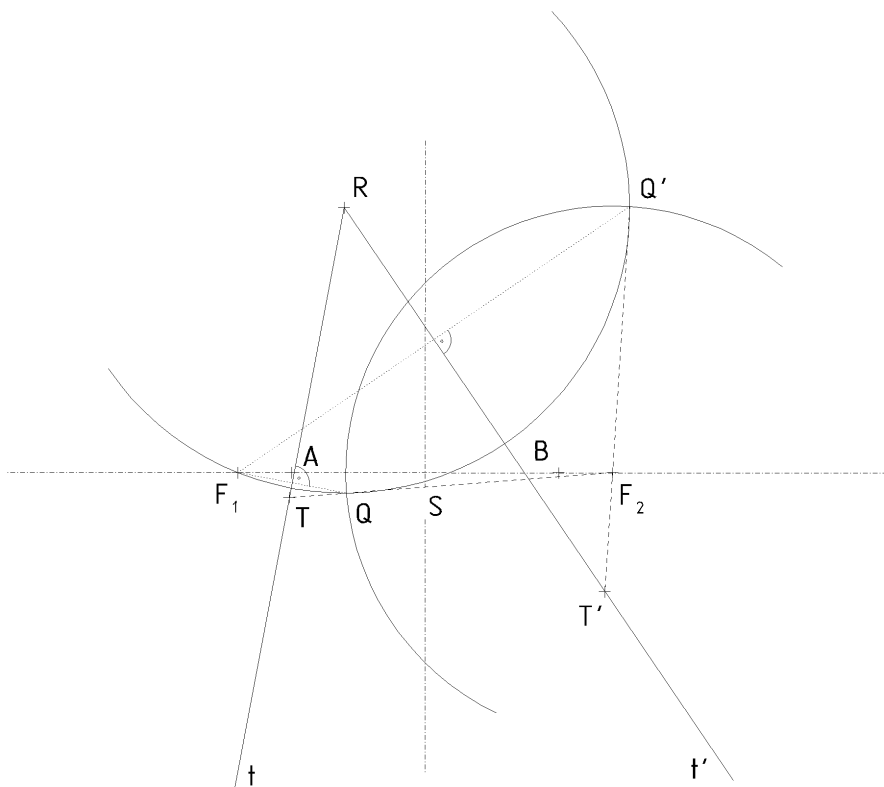


ρ – poloměr hyperoskulační kružnice ve vrcholech A, B.

Příklad č. 7: $D: \mathcal{H}(F_1, F_2, A), R$

S: sestrojte tečny z bodu R k hyperbole \mathcal{H} , určete body dotyku

Rozbor i konstrukce stejná jako v Příkladu 2 pro \mathcal{E} .

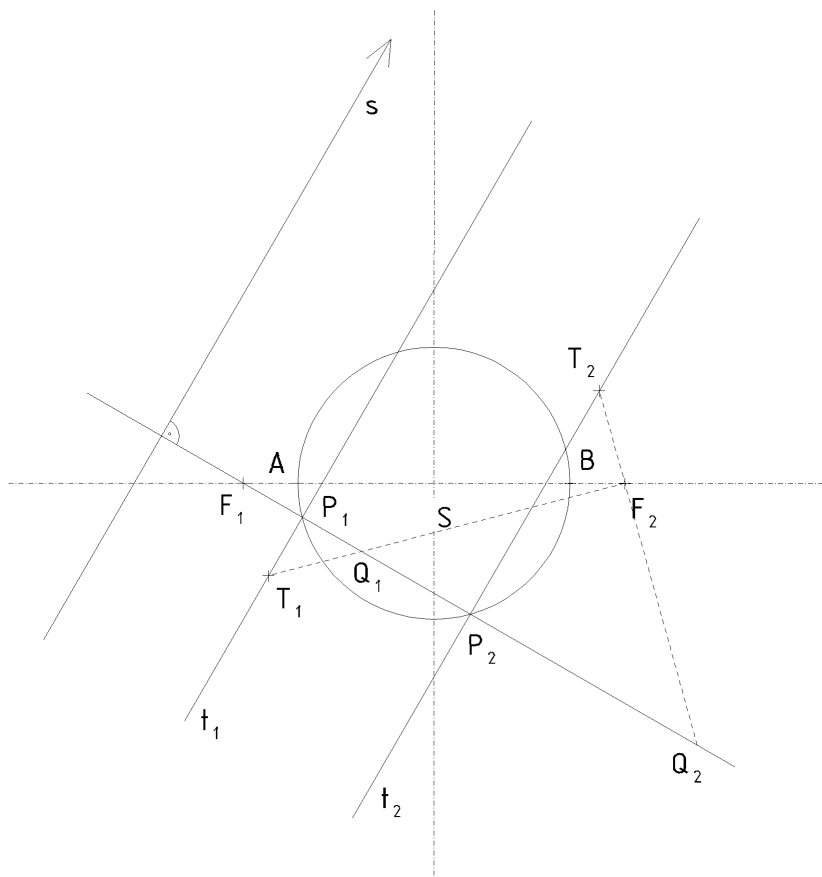
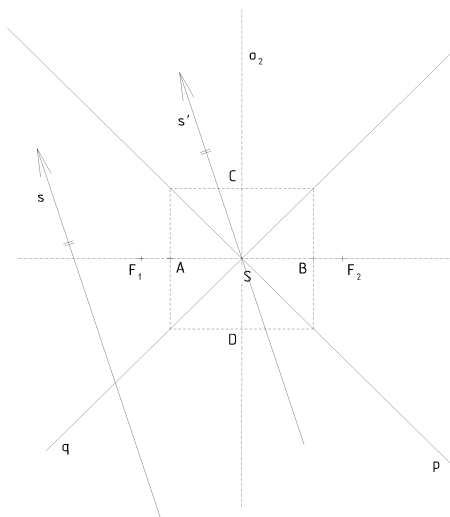


Příklad č. 8: $D: \mathcal{H}(A, B, e), s$

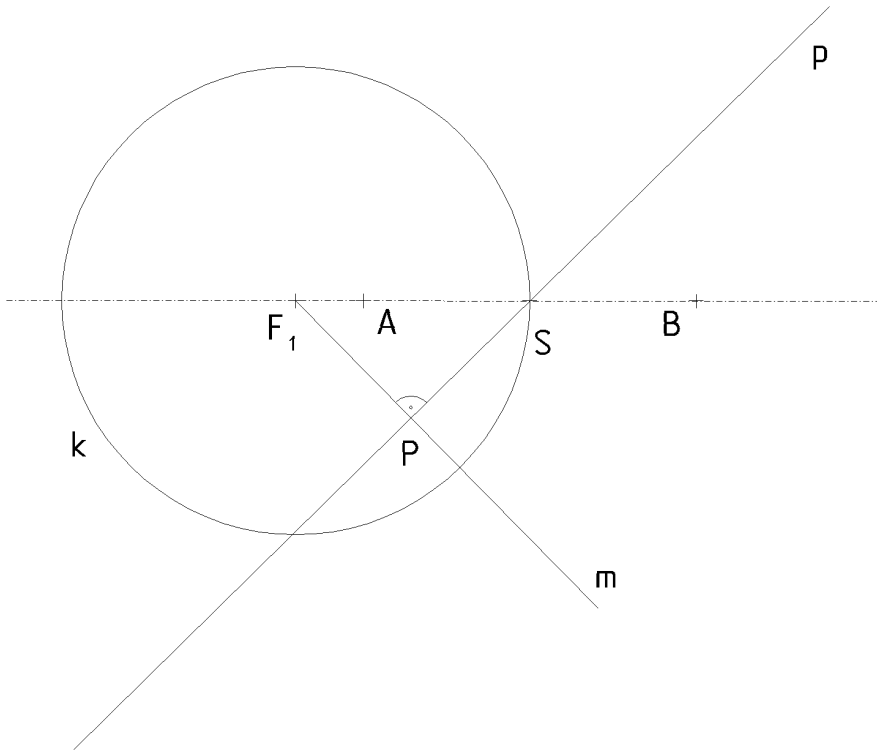
S: sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem s k hyperbole \mathcal{H} , určete body dotyku

Rozbor i konstrukce stejná jako v Příkladu 3 pro \mathcal{E} .

Úloha nemá řešení pro směr s , pokud s' , kde $s' \parallel s$, $S \in s'$, neleží v úhlu asymptot obsahující vedlejší osu hyperboly \mathcal{H} .



Příklad č. 9: D: $\mathcal{H}(F, p, e)$
S: sestrojte hyperbolu \mathcal{H}

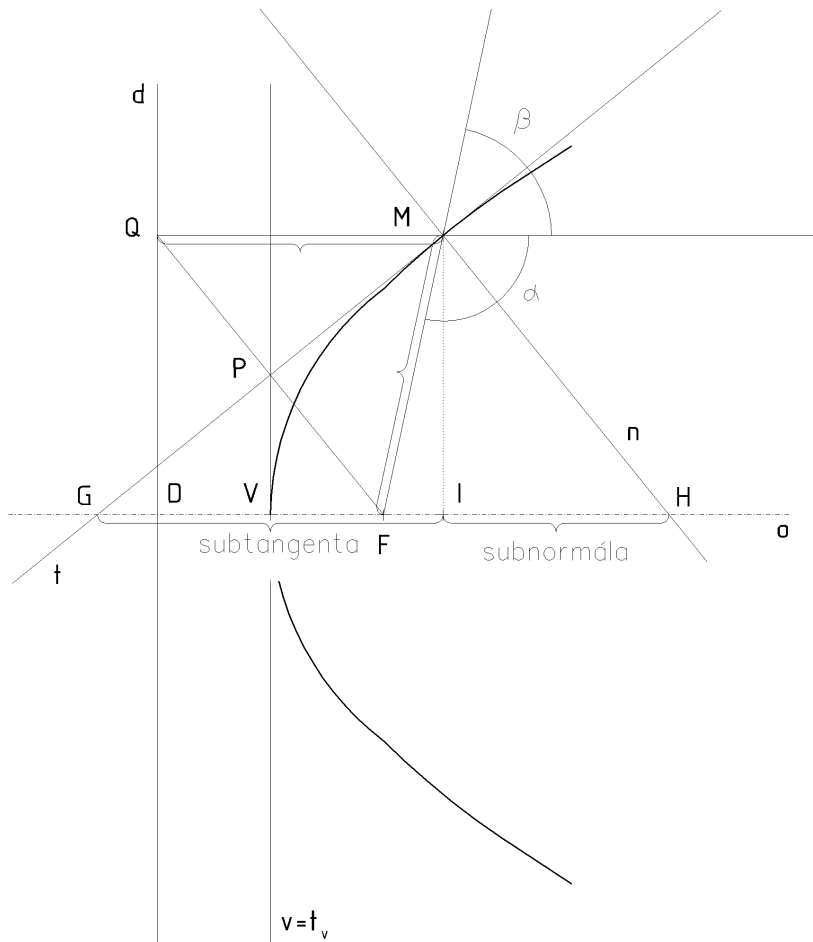


Konstrukce:

- 1) $m; F \in m, m \perp p$
- 2) $P = m \cap p$
- 3) $k(F, e)$
- 4) $S = k \cap p$
- 5) $a = |PS|$
- 6) $\mathcal{H}(F, S, a)$

1.3 Parabola

Definice: Parabola \mathcal{P} je množina všech bodů v \mathbb{E}_2 , které mají od pevného bodu F v \mathbb{E}_2 , zvaného ohnisko, a pevné přímky d , zvané řídicí přímka, která tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti.



$$M \in \mathcal{P} \Rightarrow |MF| = d(M, d)$$

Q – pata kolmice z M na d

FM, MQ : průvodiče

$o; F \in o, o \perp d$: osa paraboly \mathcal{P}

$D = o \cap d$

$V, V = |FD|/2$: vrchol paraboly \mathcal{P}

$p = |DF| = d(F, d)$: parametr \mathcal{P}

$M \in \mathcal{P}$: $\angle FMQ$ – obsahující vrchol V – nazýváme *vnější úhel průvodičů*.

K vnějšímu úhlu průvodičů β se vedlejší úhel α nazývá *vnitřní úhel průvodičů*.

$M \in \mathbb{E}_2$ libovolný :

$|MF| > d(M, d) \Rightarrow M$ je vnějším bodem paraboly \mathcal{P} .

$|MF| < d(M, d) \Rightarrow M$ je vnitřním bodem paraboly \mathcal{P} .

$|GI|$ se nazývá *subtangenta*

$|IH|$ se nazývá *subnormála*

Tečna $t_v \equiv v$ ve vrcholu V paraboly \mathcal{P} se nazývá *vrcholová tečna*, $v \perp o$, $v \parallel d$.

Parabola má hyperoskulační kružnici ve vrcholu V s poloměrem $\rho = p$.

Věta_T: V každém bodě \mathcal{P} existuje právě jedna tečna. Tečna pólí vnější úhel průvodičů (tečnu značíme obvykle t , dotykový bod T). Normála n je kolmá na tečnu t v bodě T a pólí vnitřní úhel průvodičů. $\Rightarrow t_v \parallel d$

Věta_p: Množina pat P kolmic spuštěných z ohniska F paraboly \mathcal{P} na její tečny je vrcholová tečna t_v .

Věta_Q: Množina bodů Q , souměrně sdružených s ohniskem F podle tečen paraboly \mathcal{P} , je řídicí přímka d .

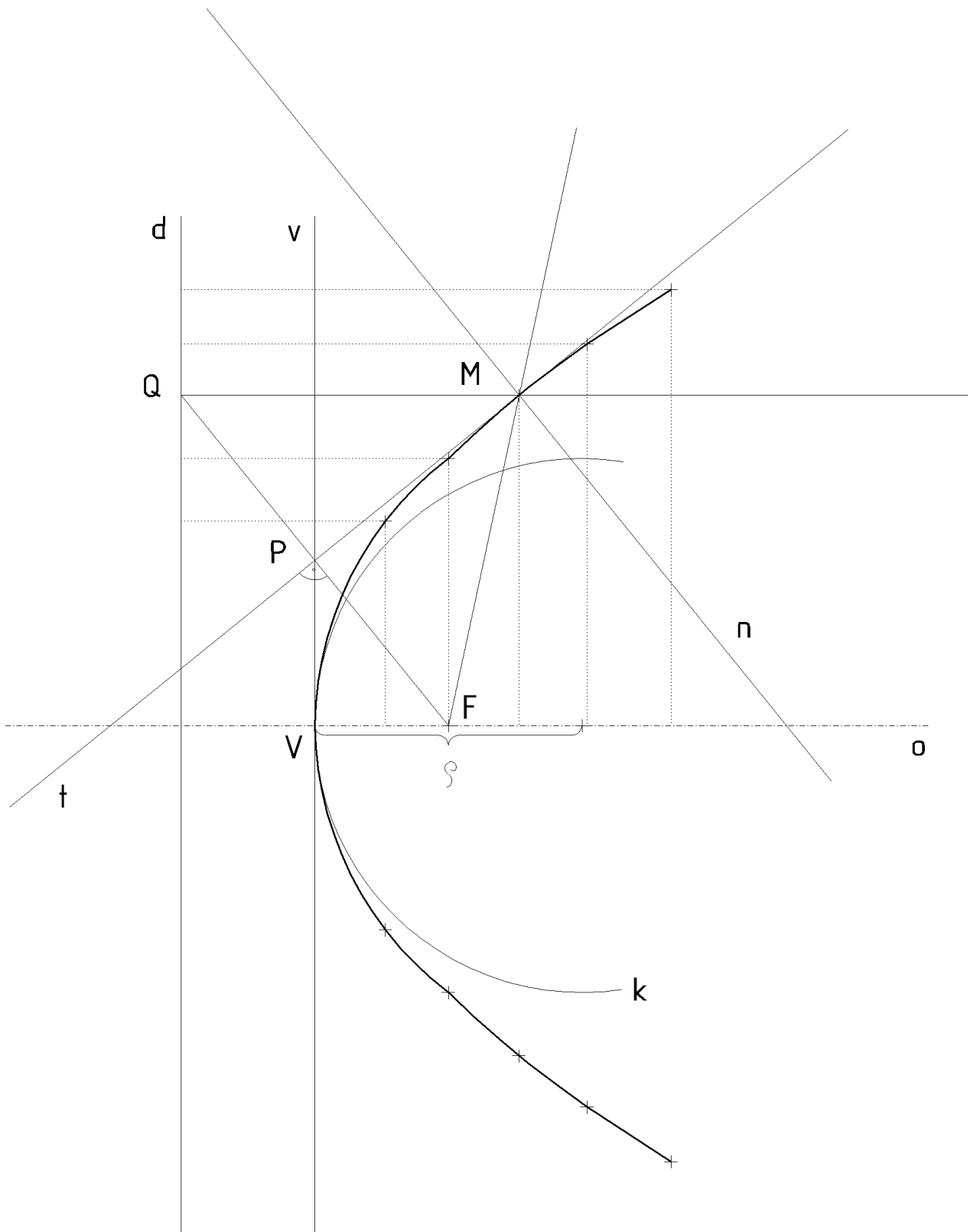
Věta: Subtangenta je půlena vrcholem V .

Věta: Délka subnormály je rovna velikosti parametru p .

Věta: Součet subtangenty a subnormály je půlen ohniskem F .

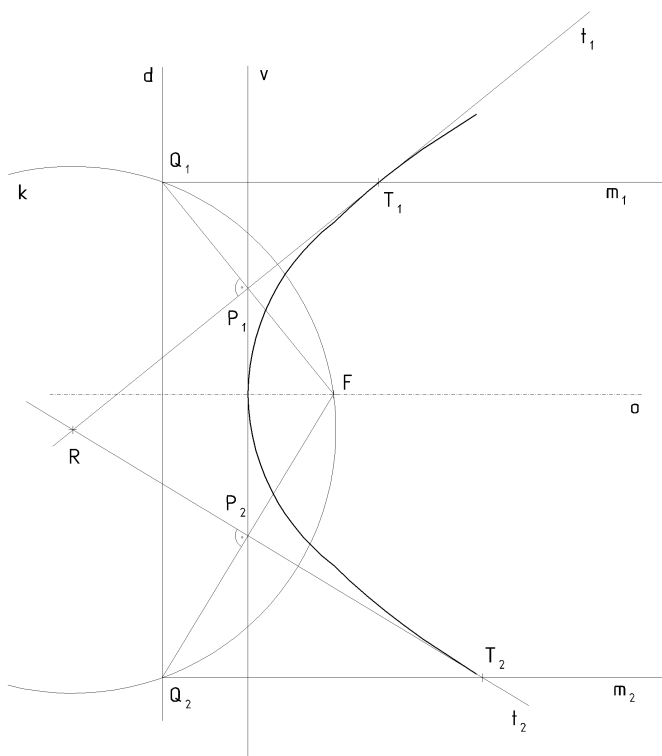
Příklad č. 10: $D: \mathcal{P}(F, d)$

S: sestrojte několik bodů paraboly, hyperoskulační kružnici, tečnu v libovolném bodě $M \in \mathcal{P}$, zkonstruuje přímky z vět V_P, V_Q



Příklad č. 11: D: $\mathcal{P}(F, d), R$

S: sestrojte tečny z bodu R k parabole \mathcal{P} , určete body dotyku

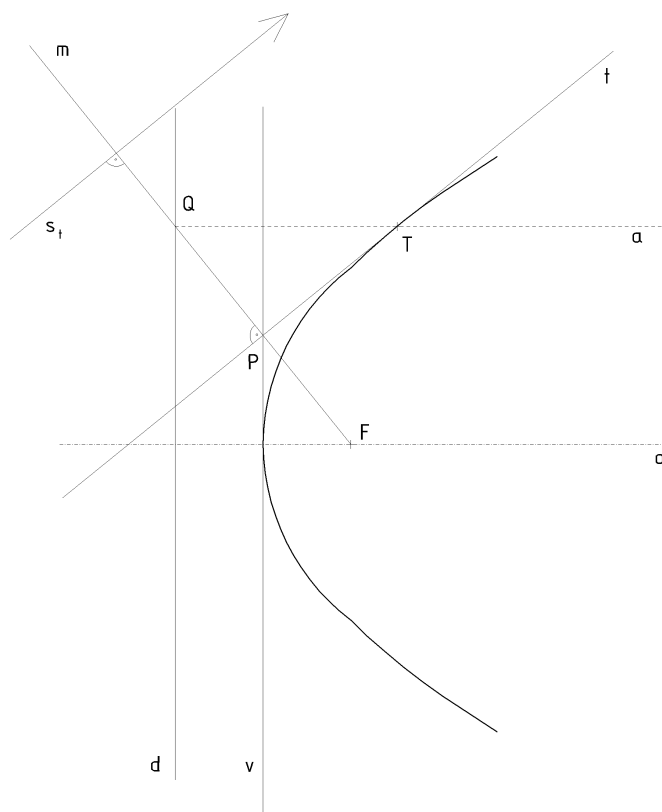


Konstrukce:

- 1) $|RF| = |RQ|$
- 2) $k(R, |RF|)$
- 3) $Q = d \cap k \Rightarrow$ výsledek určuje počet řešení
- 4) $t; R \in t, t \perp FQ$
- 5) $m; Q \in m, m \perp d$
- 6) $T = m \cap t$

Příklad č. 12: D: $\mathcal{P}(F, d), s$

S: sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem s k parabole \mathcal{P} , určete body dotyku



Konstrukce:

- 1) $m; F \in m, m \perp s$
- 2) v
- 3) $P = m \cap v$
- 4) $t; P \in t, t \parallel s$
- 5) $Q = m \cap d$
- 6) $a; Q \in a, a \perp d$
- 7) $T = a \cap t$

