**Příklad 5.3.** Nalezněte tečnou rovinu a normálu v bodě $A = [2, -6, a]$ plochy $z = f(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0.$$

**Řešení.** $A_1 = [2, -6, 3], \quad A_2 = [2, -6, -3]$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49$$
$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = 2y, \quad F'_z(x, y, z) = 2z$$

$$\begin{array}{l|l} F'_x(A_1) = 4 & F'_x(A_2) = 4 \\ F'_y(A_1) = -12 & F'_y(A_2) = -12 \\ F'_z(A_1) = 6 & F'_z(A_2) = -6 \end{array}$$

$$\tau_1 : 4(x - 2) - 12(y + 6) + 6(z - 3) = 0, \quad 2x - 6y + 3z - 49 = 0$$
$$\tau_2 : 4(x - 2) - 12(y + 6) - 6(z + 3) = 0, \quad 2x - 6y - 3z - 49 = 0$$

$$n_1 \ : \ x = 2 + 4t, \ y = -6 - 12t, \ z = 3 + 6t, \ t \in \mathbf{R}$$
$$n_2 \ : \ x = 2 + 4t, \ y = -6 - 12t, \ z = -3 - 6t, \ t \in \mathbf{R}$$

**Komentář.** Bod $A$ je bod plochy $z = f(x, y)$, tj. jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici plochy. Tedy musí platit $F(2, -6, a) \equiv a^2 - 9 = 0$. Tato rovnice má právě dvě řešení, dostáváme dva body dotyku: $A_1 = [2, -6, 3]$ a $A_2 = [2, -6, -3]$.

Rovnice tečné roviny plochy $z = f(x, y)$ v daném bodě dotyku $A = [a_1, a_2, a_3]$ je dána rovnicí

$$\tau : z = a_3 + f'_x(a_1, a_2)\,(x - a_1) + f'_y(a_1, a_2)\,(y - a_2). \qquad (1)$$

Je-li funkce $z = f(x, y)$ dána implicitně pomocí funkce $u = F(x, y, z)$, víme, že parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[a_1, a_2]$ počítáme podle vzorců

$$z'_x(a_1, a_2) = -\frac{F'_x(a_1, a_2, a_3)}{F'_z(a_1, a_2, a_3)}, \quad z'_y(a_1, a_2) = -\frac{F'_y(a_1, a_2, a_3)}{F'_z(a_1, a_2, a_3)}, \qquad (2)$$

kde $a_3 = f(a_1, a_2)$. Dosadíme-li z (2) do (1), dostáváme po úpravě vzorec

$$\tau : F'_x(A)\,(x - a_1) + F'_y(A)\,(y - a_2) + F'_z(A)\,(z - a_3) = 0 \qquad (3)$$

- *vzorec pro rovnici tečné roviny v daném bodě dotyku $A = [a_1, a_2, a_3]$ plochy $z = f(x, y)$ implicitně dané rovnicí $F(x, y, z) = 0$.*
(Poznámka: Je vidět, že aby bylo zadání korektní, tedy bod $A$ byl skutečně bodem dané plochy, nutně musí platit $F(A) = 0$.) Víme, že koeficienty $a, b, c$ v obecné rovnici roviny $\rho:\ ax + by + cz + d = 0$ mají geometrický význam souřadnic normálového vektoru $\vec{n}_\rho$ roviny $\rho$. Tedy z (3) můžeme vyjádřit souřadnice normálového vektoru $\vec{n}_\tau$ tečné roviny $\tau$ v bodě dotyku $A$:

$$\vec{n}_\tau = \Big(F'_x(A), F'_y(A), F'_z(A)\Big). \tag{4}$$

Přímka $p \subset \mathbf{E}_3$ určená bodem $A = [a_1, a_2, a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{s}_p = (s_1, s_2, s_3)$ má parametrizaci:

$$x = a_1 + t\,s_1,\ y = a_2 + t\,s_2,\ z = a_3 + t\,s_3,\ t \in \mathbf{R}.$$

Protože $\vec{s}_n = \vec{n}_\tau$ (*tj. "normálový vektor tečně roviny je směrový vektor normály"*), potom (4) nám dává

$$x = a_1 + tF'_x(A), y = a_2 + tF'_y(A), z = a_3 + tF'_z(A),\ t \in \mathbf{R}$$

- *parametrizaci normály plochy $F(x, y, z) = 0$ v bodě $A$.*