

## 2. Trojný integrál

Vypočtete  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ , kde:

2.1  $f(x, y, z) = xy$ ,  $\Omega = \{[x, y, z] \in R^3; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\}$ .

[ bez transformace, stačí obrázek projekce do roviny  $xy$ , zkuste také obrázek v  $R^3$ ; integrací polynomů vyjde  $\frac{7}{120}$  ]

2.2  $f(x, y, z) = z^2$ ,  $\Omega$  je vymezena rovinami  $x = 2, y = 5, x + z = 6$  v 1. oktantu.

[ bez transformace, nakreslete obrázek projekce i obrázek v  $R^3$ ; integrací polynomů vyjde  $\frac{1300}{3}$  ]

2.3  $f(x, y, z) = xyz$ ,  $\Omega = \{[x, y, z] \in R^3; y \geq x^2, x \geq y^2, z \geq 0, z \leq xy\}$ .

[ bez transformace, stačí obrázek projekce, zkuste také obrázek v  $R^3$  (sedlová plocha); vyjde  $\frac{1}{96}$  ]

2.4  $f(x, y, z) = xyz$ ,  $\Omega = \{[x, y, z] \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ .

[ sférické souřadnice, všechny meze konstantní; vyjde  $\frac{1}{48}$  ]

2.5  $f(x, y, z) = xy$ ,  $\Omega = \{[x, y, z] \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ .

[ cylindrické souřadnice, obrázek v  $R^3$  i projekce nutné (koule a "vršek" rotačního kužele), restrikcí raději ne; snadno vyjde 0 ]

Vypočtete:

2.6 Objem tělesa  $\Omega$  vymezeného plochami  $z = 4 - x^2, 2x + y = 4$  v 1. oktantu.

[ bez transformace, projekce i obrázek v  $R^3$  nutné; integrací polynomů vyjde  $\frac{40}{3}$  ]

2.7 Objem tělesa  $\Omega = \{[x, y, z] \in R^3; x^2 + y^2 \leq 1, z \leq 1 - x^2 - y^2, z \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$ .

[ cylindrické souřadnice, stačí projekce, zkuste také obrázek v  $R^3$  (rotáční paraboloid), restrikcí nepoužít; vyjde  $\frac{\pi}{16}$  ]

2.8 Objem tělesa  $\Omega = \{[x, y, z] \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az\}$ , kde  $a > 0$  je konstanta.

[ cylindrické souřadnice, obrázek v  $R^3$  (2 koule) i projekce nutné, jaký je poloměr projekce?, restrikce  $4x$ ; vyjde  $\frac{5\pi a^3}{12}$  ]

2.9 Těžiště tělesa  $\Omega = \{[x, y, z] \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$  s danou hustotou  $\sigma(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , kde  $a > 0, k > 0$  jsou konstanty.

[ sférické souřadnice, obrázek v  $R^3$  i projekce snadné;  $x_T = y_T = 0, z_T = \frac{2a}{5}$  ]

2.10 Hmotnost tělesa  $\Omega = \{[x, y, z] \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \leq x^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ , kde  $a > 0$  je konstanta, s danou hustotou  $\sigma(x, y, z) = x$ .

[ cylindrické souřadnice, stačí obrázek projekce (meze z jasné); snadno vyjde  $\frac{2a^5}{15}$  ]

2.11 Těžiště tělesa  $\Omega$  s danou hustotou  $\sigma(x, y, z) \equiv 1$  vymezeného hraničními rovinami  $x = 0, z = 0, y = 1, y = 3, x + 2z = 3$ .

[ bez transformace, obrázek v  $R^3$  i projekce jsou snadné; vyjde  $T = [1, 2, \frac{1}{2}]$  ]

2.12 Objem tělesa  $\Omega$  vymezeného plochami  $hz = x^2 + y^2, z = h$ , kde  $h > 0$  je konstanta.

[ cylindrické souřadnice, pozor na meze proměnné  $z$ ; vyjde  $\frac{\pi h^3}{2}$  ]

2.13 Momenty setrvačnosti  $I_x, I_y, I_z$  tělesa  $\Omega$  s danou hustotou  $\sigma(x, y, z) \equiv 1$  vymezeného plochami  $x^2 + y^2 = a^2, z = 0, z = b$ , kde  $a > 0, b > 0$  jsou konstanty.

[ *cyklindrické souřadnice, obrázek v  $R^3$  i projekce snadné, (zdůvodněte si); vyjde  $I_x = I_y = \pi a^2 b \left( \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3} \right)$ ,  $I_z = \frac{\pi a^4 b}{2}$  ]*

2.14 Hmotnost tělesa  $\Omega = \{[x, y, z] \in R^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z^2 \geq x^2 + y^2, z \geq 0\}$ , kde  $a > 0$  je konstanta, s danou hustotou  $\sigma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$ .

[ *lepší jsou sférické souřadnice, všechny meze konstantní, restrikce  $4x$ , obrázek v  $R^3$  i projekce; výsledek není pěkný, ale integrace je jednoduchá (po úpravě):  $\frac{\pi^2 a^4}{16} - \frac{\pi a^4}{8} + \frac{2\pi a^3}{3} - \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$  ]*

2.15 Objem tělesa  $\Omega = \{[x, y, z] \in R^3; x^2 + y^2 \leq 2ax, |y| \leq x, 0 \leq z \leq x\}$ , kde  $a > 0$  je konstanta.

[ *cyklindrické souřadnice, stačí obrázek projekce, zkuste i obrázek v  $R^3$ , restrikce  $2x$   $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ ; vyjde  $a^3 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} \right)$  ]*

2.16 Hmotnost tělesa  $\Omega = \{[x, y, z] \in R^3; a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4a^2, y \leq x, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$  s danou hustotou  $\sigma(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}$ , kde  $a > 0$  je konstanta.

[ *cyklindrické souřadnice, stačí obrázek projekce, restrikce  $4x$   $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ ; vyjde  $\frac{\pi a^3}{3} (2\sqrt{5} + \sqrt{2})$  ]*

2.17 Objem a hmotnost tělesa  $\Omega = \{[x, y, z] \in R^3; x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$  s danou hustotou  $\sigma(x, y, z) = 8(64x^2y^2 + z)$ .

[ *cyklindrické souřadnice, stačí obrázek projekce (meze z jasné) restrikce  $4x$ ; vyjde  $V = \frac{\pi}{4}$ ,  $m = \frac{26\pi}{3}$  ]*

2.18 Objem tělesa  $\Omega = \{[x, y, z] \in R^3; x^2 + y^2 \leq 2x, -1 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$ .

[ *cyklindrické souřadnice, stačí obrázek projekce, zkuste i obrázek v  $R^3$ , restrikce  $2x$ ; vyjde  $\frac{7\pi}{2}$  ]*

*Ve všech příkladech jsou pouze obvyklé goniometrické nebo odmocninové substituce. Vždy zkuste také obrázek v  $R^3$ .*