1. Základní pojmy

1.1. Bod, přímka a rovina. *Bod, přímka* a *rovina* jsou základní pojmy (elementy) projektivní geometrie. Projektivní geometrie (projekce=promítáni) se zabývá těmi geometrickými vlastnostmi, které se středovým promítáním *nemění*. Říkáme, že uvedená vlastnost je *invariantem* (v našem případě středového promítání). Mezi takovéto vlastnosti patří na př. *incidence* nebo *dvojpoměr*. Naopak velikost vzdálenosti dvou bodů nebo velikost úhlu mezi dvěma různoběžkami se (obecně) nezachovává promítáním

Poznámka 1.1. incidence $\Rightarrow$ vlastnost „být incidentni“ (ležet na $\vee$ protínat se)

1.2. Zavedení nevlastních elementů. Geometrii rozšířenou o tzv. *nevlastní elementy* nazýváme *rozšířený euklidovský prostor*

1. Každá vlastní přímka je incidentní s jedním vevlastním bodem.
2. Kařdá vlastní rovina je incidentní s jednou nevlastní přímkou (která je tvořena všemi nevlastními body této roviny).
3. Všechny nevlastní body prostoru tvoří nevlastní rovinu.
4. Všechny navzájem rovnoběžné přímky jsou incidentní s týmž nevlastním bodem.
5. Všechny navzájem rovnoběžné roviny jsou incidentní s touž nevlastní přímkou.
6. Přímka rovnoběžná s danou rovinou protíná ji v nevlastním bodě.
7. Přímka incidentní se dvěma různými nevlastními body je nevlastní.
8. Rovina incidentní se třemi navzájem různými nevlastními body (které neleží na téže přímce) je nevlastní.

Projektivní prostor bude takový rozšířený euklidovský prostor, ve kterém nerozlišujeme body a přímky vlastní od nevlastních.

Afinní prostor je takový rozšířený euklidovský prostor, kde nevlastní rovinu zvlášť vyznačíme, tj. její nevlastní body a přímky budeme sledovat a odlišovat od vlastních útvarů.

2. Základní lineární útvary I. řádu

Příma řada bodová je souhrn všech bodů $A, B, C, \cdots$ přímky p, kterou nazýváme *nositelkou* řady a řadu označujeme $p(A, B, C, \cdots)$.

Přímkový svazek (nebo-li svazek přímek) v rovině je souhrn všech přímek $a, b, c, \cdots$ roviny, které procházejí jediným bodem, středem S svazku. Označení $S(a, b, c, \cdots)$.

Základní lineární útvary I. řádu v prostoru jsou:
Rovinový svazek (nebo-li svazek rovin) o ose o jako souhrn všech rovin prostoru, které procházejí touto osou o, Označení $o(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$. Jestliže protneme tento svazek další rovinou ρ (ρ není incidentní s osou o), obdržíme přímkový svazek $S(a, b, c, \cdots)$. Protneme-li rovinový svazek příčkou p (mimoběžnou s osou o), obdržíme na př. $A = \alpha \cap p$, atd., na příčce p bodovou řadu $p(A, B, C, \cdots)$.

3. Základní lineární útvary II. řádu

Základními lineárními útvary II. řádu rozumíme ∞^2 prvků, na př. bodů incidentních s jediným prvkem, rovinou ρ. Podobně hovoříme o přímkách, incidentních s rovinou ρ nebo o přímkách incidentních s bodem. Dále sem patří souhrn rovin incidentních s bodem. Množství těchto prvků je závislé již na *dvou* parametrech.

- **rovinné pole** - souhrn všech *bodů* a *přímek*, ležících v rovině ρ
- **bodové pole**
- **přímkové pole**
- **trs** o vrcholu S - souhrn všech *přímek* a *rovin*, procházejících vrcholem S.
  - **trs přímkový**
  - **trs rovinový**

4. Základní lineární útvary III. řádu

Prostor - souhrn všech bodů a rovin prostoru (Zavádíme zde pojem *nevlastní pole* jakožto souhrn nevlastních bodů všech přímek prostoru a nevlastních přímek všech rovin prostoru).

5. Dělící poměr

5.1. Dělící poměr na bodové řadě.

Definice 5.1. Dělící poměr λ_C bodu C vzhledem k základním bodům A, B je podíl délek orientovaných úseček $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{BC}$. Značíme $\lambda_C = (ABC)$

- Pro $C \equiv A$ platí: $\lambda_C = \frac{\overrightarrow{AA}}{\overrightarrow{BA}} = \frac{0}{\overrightarrow{BA}} = 0$ (tj. čitatel je úsečka nulové délky)
- Pro $C \equiv B$ platí: $\lambda_C = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BB}}$ a λ_C není definován (roste nade všechny meze)
- Pro nevlastní bod ${}_\infty U$ platí:
$$\lambda_{\infty U} = \lim_{C\to\infty} \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \lim_{C\to\infty} \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}} = \lim_{C\to\infty} \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} + 1 = 0 + 1 = 1,$$
tj. vzdaluje-li se bod C od bodů A, B neomezeně (napravo či nalevo), potom λ_C se blíží neomezeně k hodnotě $\lambda_C = 1$.

Věta 5.1. Základní vlastností rovnoběžného promítání je neměnnost dělícího poměru. *Říkáme, že dělící poměr je* invariantem *rovnoběžného promítání. Naopak středovým promítáním se se dělící poměr obecně* nezachovává.

5.2. Dělící poměr ve svazku přímek. Dělící poměr přímky c vzhledem k přímkám a, b definujeme takto: $\lambda_c = \frac{\sin \widehat{a,c}}{\sin \widehat{b,c}} = (abc)$.

5.3. Dělící poměr ve svazku rovin α, β, γ. Dělící poměr roviny γ vzhledem k rovinám α, β definujeme takto: $\lambda_\gamma = \frac{\sin \widehat{\alpha,\gamma}}{\sin \widehat{\beta,\gamma}} = (\alpha\beta\gamma)$.

6. Dvojpoměr

6.1. Dvojpoměr na bodové řadě.

Definice 6.1. Podíl dělících poměrů $\lambda_C : \lambda_D = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \mu_D$ nazýváme dvojpoměr μ_D bodu D vzhledem k bodu C pro základní body A, B. Zapisujeme stručně $\mu_D = (ABCD)$, mezi body nedáváme čárky

Pořadí zápisu čtyř bodů A, B, C, D je *závazné*. Změnou bodů C a D (výměnou písmen C a D v zápisu) vymění se v podílu dělicích poměrů délky useček $\overline{AR}$ a $\overline{AQ}$, takže hodnota dvojpoměru μ_D přejde v hodnotu převrácenou $\frac{1}{\mu_D}$. Výměny, které nemají na hodnotu μ_D vliv se řídí *větou*:

Věta 6.1. *Vyměníme-li vzájemně dva body z uvedené čtveřice A, B, C a D a současně dva body zbývající, pak hodnota dvojpoměru čtveřice se nemění.*

6.2. Harmonická čtveřice bodová.

Definice 6.2. Čtveřice bodů A, B, C, D s hodnotou $(ABCD) = -1$ se nazývá *harmonická* a o dvojicích A, B a C, D (které se vyhledem k zápornému znaménku dvojpoměru vzájemně oddělují) říkáme, že se *oddělují harmonicky*.

6.3. Dvojpoměr v přímkovém svazku.

Definice 6.3. Dvojpoměr čtyř přímek ve svazku $S(a, b, c, d)$ je podíl dělících poměrů přímek c, d vzhledem k základní dvojici přímek a, b. Zapisujeme:

$$\frac{\lambda_c}{\lambda_d} = \frac{(abc)}{(abd)} = \frac{\sin \widehat{a, c}}{\sin \widehat{b, c}} : \frac{\sin \widehat{a, d}}{\sin \widehat{b, d}} = (abcd) = \mu_d.$$

6.4. Dvojpoměr v rovinovém svazku.

Definice 6.4. Dvojpoměr čtyř rovin svazku $o(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ je podíl dělících poměrů rovin γ, δ vzhledem k základní dvojici rovin α, β, tj.

$$\frac{\lambda_\gamma}{\lambda_\delta} = \frac{(\alpha\beta\gamma)}{(\alpha\beta\delta)} = \frac{\sin \widehat{\alpha, \gamma}}{\sin \widehat{\beta, \gamma}} : \frac{\sin \widehat{\alpha, \delta}}{\sin \widehat{\beta, \delta}} = (\alpha\beta\gamma\delta) = \mu_\delta.$$

6.5. **Věta Pappova.**

Věta 6.2. *Dvojpoměr je invariant středového promítání.*

Důkaz.

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}}{\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}} = \frac{\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot v}{\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot v}}{\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot v}{\frac{1}{2}\cdot\overline{BD}\cdot v}} = \frac{\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{AS}\cdot\overline{CS}\cdot\sin\widehat{a,c}}{\frac{1}{2}\cdot\overline{BS}\cdot\overline{CS}\cdot\sin\widehat{b,c}}}{\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{AS}\cdot\overline{DS}\cdot\sin\widehat{a,d}}{\frac{1}{2}\cdot\overline{BS}\cdot\overline{DS}\cdot\sin\widehat{b,d}}} = \frac{\frac{\sin\widehat{a,c}}{\sin\widehat{b,c}}}{\frac{\sin\widehat{a,d}}{\sin\widehat{b,d}}} = \frac{(abc)}{(abd)} = (abcd)$$

$$\vdots$$

□

Pappovu větu lze také upravit takto:

Věta 6.3. *Dvojpoměr uspořádané čtveřice útvarů 1. řádu a sice bodové řady, resp. přímkového svazku se nemění při promítání, resp. řezu.*

7. Úplný čtyřroh a čtyřstran

7.1. **Úplný čtyřroh.**

Definice 7.1. Skupina čtyř bodů A, B, C, D v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, s jejich šesti spojnicemi AB, BC, CD, DA, BD a AC se nazývá *úplný čtyřroh* $ABCD$.

Body A, B, C, D se nazývají *vrcholy* a uvedené spojnice se nazývají *strany čtyřrohu.* Tyto strany se protínají ještě v dalších třech průsečících, tj. $AC \cap CD = P, AD \cap BC = R$ a $AC \cap BD = Q$. Body P, Q, R jsou vrcholy trojúhelníka, nazývaného *diagonální*, přímky PQ, QR a RP se nazývají *strany diagonálního trojúhelníka.*

7.2. **Princip duality v projektivní rovině.** Z každé věty (týkající se incidenčních úloh) v rovinné projektivní geometrii obdržíme novou, pravdivou větu, když v původní větě slovo *bod* nahradíme slovem *přímka* a opačně slovo *přímka* nahradíme slovem *bod*, přičemž incidenci zachováme. Takové věty jsou potom vzájemně *duální.*

7.3. **Úplný čtyřstran.** Duální útvar k *úplnému čtyřrohu.*