VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

MATEMATIKA I

MODUL GA01_M01

VYBRANÉ ČÁSTI A APLIKACE VEKTOROVÉHO POČTU

STUDIJNÍ OPORY PRO STUDIJNÍ PROGRAM
GEODÉZIE A KARTOGRAFIE S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

[0]Typeset by LaTeX 2_ε

Obsah

Úvod

Cíle

Cílem našeho textu není přesné formální vybudování základů vektorové algebry a analytické geometrie v trojrozměrném prostoru. Naopak, chceme pouze vytvořit doplněk textů již napsaných pro studenty kombinované formy studia, který bude reagovat na potřeby studijního programu geodézie a kartografie.

V úvodní části modulu se budeme věnovat vektorové algebře, v níž zvolíme poněkud odlišný přístup od modulu BA01_M02 určeného pro obecné zaměření kombinované formy studia. Dáme přednost geometrickému a fyzikálnímu popisu vektorových operací, které navíc nebudeme studovat od začátku v ortonormální bázi.

V odpovídajících číselně vyjádřených odstavcích textu jsou stanoveny následující cíle:

1.1 Připomenout základní operace s geometrickými vektory. Je potřebné pochopit geometrickou interpretaci pojmů – vektory kolineární (nekolineární), vektory komplanární (nekomplanární) – a naučit se s nimi pracovat.

1.2 Jedná se o nejdůležitější odstavec celého modulu. Je potřebné pochopit skalární, vektorový i smíšený součin vektorů včetně vytvoření geometrické představy o významu a možnostech použití těchto pojmů. Jedná se o základní stavební prvky dalších následujících odstavců modulu.

1.3 Odstavec obsahuje základní potřebné pojmy sférické trigonometrie, se kterými je potřebné se do detailů seznámit. Odvozování vzorců není samoúčelné, je zkouškou pochopení obsahu odstavce 1.2 .

1.4 Pojmy používané v prvních třech odstavcích zobecníme na úroveň, která se standardně používá nejen v matematické literatuře. Potřebné je vytvořit si představu o obsahu pojmu lineární prostor a především pochopit pojmy báze a dimenze lineárního prostoru.

1.5 Studijní zaměření geodézie a kartografie pracuje s vektory nezávisle na volbě souřadnicových soustav. V odstavci se seznámíte s ortonormálními bázemi ve třírozměrném prostoru a aritmetikou počítání s vektory v ortonormální bázi.

1.6 Cílem odstavce je prohloubit pochopení analytické geometrie v prostoru. Důsledně jsou aplikovány skalární, vektorový a smíšený součin vektorů na metodiku řešení úloh i výpočetní postupy. Přístup se odlišuje od pojetí používaného na středních školách. Pečlivě si proto promyslete a propočítejte i řešené příklady tohoto odstavce.

1.7 Prostudujte si motivační příklad, který pro vás může být v budoucnu užitečný. Odstavec obsahuje základní pojmy nezbytné pro zvládnutí výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů matice. Je potřebné zvládnout techniku výpočtu. V jednom z dalších modulů se seznámíte s rozklady polynomů, které vám umožní zvolit si i jinou metodiku řešení příkladů.

Požadované znalosti

Znalost geometrických vektorů a základů analytické geometrie v prostoru v rozsahu látky probírané na středních školách.

Doba potřebná ke studiu

Čas potřebný ke zvládnutí tohoto modulu je odhadnut pro *průměrného studenta* jako hodnota nejméně ?? hodin.

Klíčová slova

Geometrické vektory, skalární součin vektorů, vektorový součin vektorů, smíšený součin vektorů, lineární nezávislost vektorů, reálný lineární prostor, sférický trojúhelník, souřadnice vektoru, přímka v prostoru, rovina v prostoru, úlohy polohy, úlohy metrické.

Na konci modulu zařazen *Rejstřík*, ve kterém jsou další klíčová slova přehledně uspořádána i s odkazy na odpovídající stránky.

Kapitola 1

Vybrané části vektorového počtu

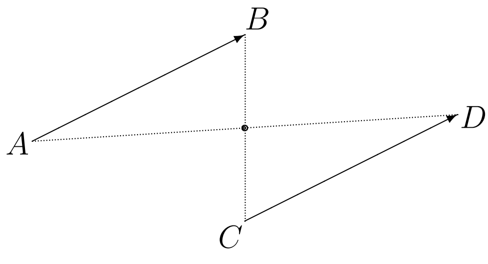
1.1 Operace s geometrickými vektory ve $V(\mathbb{E}_3)$

Poznámka k označení

Aniž bychom se zabývali přesnou definicí afinního prostoru $\mathbb{A}_3$, budeme nejprve studovat tzv. *afinní vlastnosti* euklidovského prostoru $\mathbb{E}_3$. ***Euklidovským prostorem*** $\mathbb{E}_3$ přitom budeme rozumět bodový prostor, v němž:

- každému bodu $A \in \mathbb{E}_3$ je jednoznačně přiřazena uspořádaná trojice $[a_1, a_2, a_3]$ reálných čísel, které nazýváme souřadnicemi bodu A a píšeme $A = [a_1, a_2, a_3]$,
- každým dvěma bodům $A, B \in \mathbb{E}_3$, kde $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, je přiřazena euklidovská vzdálenost $\rho(A, B)$ bodů A, B, pro kterou platí $\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(a_i - b_i)^2}$.

Každé uspořádané dvojici bodů (A, B) přiřadíme orientovanou úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B a budeme ji nazývat ***umístěním vektoru*** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Můžeme pak také psát $B = A + \vec{u}$ nebo $B - A = \vec{u}$. Přitom ***vektorem*** $\vec{u}$ budeme rozumět třídu orientovaných úseček, které mají týž směr a velikost. Tuto vlastnost můžeme také popsat tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ patří do jedné třídy, jestliže úsečky (A, D) a (B, C) mají týž střed.

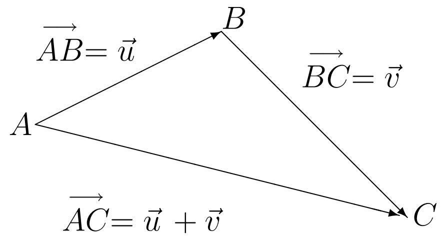


Množinu všech vektorů pak nazýváme ***vektorovým zaměřením*** prostoru $\mathbb{E}_3$ a označujeme ji $V(\mathbb{E}_3)$.

Pro takto zavedené pojmy platí:

a) Pro libovolný bod $A \in \mathbb{E}_3$ a libovolný vektor $\vec{u} \in V(\mathbb{E}_3)$ existuje jediný bod $B \in \mathbb{E}_3$ takový, že $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

b) Je-li $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, pak $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ se nazývá ***součet vektorů*** $\vec{u}, \vec{v}$.



- Je-li $\vec{u} = \overrightarrow{AA}$, pak vektor $\vec{u}$ se nazývá ***vektor nulový***, značí se $\vec{o}$ a má délku rovnou nule.

- Je-li $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, pak vektor $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ (změněná orientace) se nazývá ***vektor opačný*** k vektoru $\vec{u}$.

- ***Úhlem nenulových vektorů*** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ nazýváme úhel φ polopřímek AB, AC měřený v mezích $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Poznámka: Prostor bodů v trojrozměrném prostoru $\mathbb{E}_3$ spolu s vektorovým zaměřením $V(\mathbb{E}_3)$, v nichž platí $a)$ a $b)$ se často nazývá *afinním prostorem* a značí se $\mathbb{A}_3$.

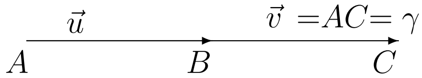
Věta 1. Pro libovolné tři vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ve $V(\mathbb{E}_3)$ platí

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,
3. $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$,
4. ke každému vektoru $\vec{u}$ existuje opačný vektor $-\vec{u}$ tak, že $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$.

Součin vektoru s reálným číslem

Má-li $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ délku $|\vec{u}|$ a je-li $\gamma \in \mathbb{R}$ libovolné číslo, pak klademe

- $\gamma\vec{u} = \vec{o}$, pokud $\gamma = 0$ nebo $\vec{u} = \vec{o}$,
- $\gamma\vec{u} = \vec{v}$, kde $\vec{u} \neq \vec{o}$, $|\vec{v}| = |\gamma| \cdot |\vec{u}|$ a vektor $\vec{v}$ je souhlasně (nesouhlasně) rovnoběžný s vektorem $\vec{u}$ v případě $\gamma > 0$ ($\gamma < 0$.)



$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \gamma \cdot \vec{u} = 2\vec{u}$ pro $\gamma = 2 > 1 > 0$, $|\vec{v}| = 2|\vec{u}|$

Věta 2. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou libovolná čísla a $\vec{u}, \vec{v}$ libovolné vektory ve $V(\mathbb{E}_3)$. Pak platí

1. $\alpha(\beta\vec{u}) = \alpha\beta\vec{u}$,
2. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$,
3. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$,
4. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Lineární nezávislost vektorů

Poznámka:
Všimněme si, že pro vektory z $V_3 = V(\mathbb{E}_3)$ platí:

(ι) $\vec{u}, \vec{v} \in V_3 \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V_3$
(součet vektorů z V_3 je vektor ve V_3).

($\iota\iota$) $\vec{u} \in V_3, \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha\vec{u} \in V_3$
(násobek vektoru z V_3 je vektor ve V_3).

($\iota\iota\iota$) Operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem mají vlastnosti uvedené ve větách 1, 2.

Vektory kolineární (nekolineární)

Nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$, pro které existují taková umístění, že leží na jedné přímce, nazýváme ***kolineární vektory***. *Nulový vektor považujeme za kolineární s každým vektorem.* Pro kolineární vektory $\vec{u}, \vec{v}$, platí:

a) Je-li $\vec{u} \neq \vec{o}$, pak existuje právě jedno číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že $\vec{v} = k\vec{u}$.

b) Rovnice $k\vec{u} + l\vec{v} = \vec{o}$ je splněna alespoň pro jednu dvojici čísel $k, l \in \mathbb{R}$, přičemž čísla k, l nejsou současně rovna nule.

Řekneme naopak, že vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou ***nekolineární***, když rovnice $k\vec{u}+l\vec{v} = \vec{o}$ je splněna pouze tehdy, když $k = 0$ a současně $l = 0$.

Příklad 1.1.1 Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2 = -2\vec{x}_1$ jsou kolineární, protože vektor $\vec{x}_2$ je násobkem vektoru $\vec{x}_1$. V jiném pohledu, platí rovnice $2\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{o}$ a rovnice $k\vec{x}_1 + l\vec{x}_2 = \vec{o}$ má nenulové řešení $k = 2, l = 1$.

Příklad 1.1.2 Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ jsou nekolineární. Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, $\vec{v} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, rovněž nekolineární.

Řešení: Předpokládejme, že existuje nenulové reálné číslo k takové, že $\vec{u} = k\vec{v}$, tj. vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou kolineární. Pak platí $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = k(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ a odtud $(1-k)\vec{x}_1 + (1+k)\vec{x}_2 = \vec{o}$. Protože vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ jsou nekolineární, musí platit $1 - k = 0$ a současně $1 + k = 0$, což není možné. Neplatí proto náš předpoklad a vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou nekolineární.

Vektory komplanární (nekomplanární)

Řekneme, že nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou ***komplanární***, jestliže existují taková jejich umístění, že leží v jedné rovině. Pokud je některý z vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nulovým vektorem, pak tuto trojici vektorů považujeme také za komplanární. Pro komplanární vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ platí:

a) Jsou-li $\vec{u}, \vec{v}$ nekolineární vektory, pak existuje právě jedna dvojice čísel $k, l \in \mathbb{R}$ taková, že $\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$.

b) Rovnice $k\vec{u} + l\vec{v} + m\vec{w} = \vec{o}$ je splněna alespoň pro jednu trojici čísel $k, l, m \in \mathbb{R}$, přičemž čísla k, l, m nejsou současně rovna nule.

Trojici vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nazveme ***nekomplanární***, když je rovnice $k\vec{u} + l\vec{v} + m\vec{w} = \vec{o}$ splněna pouze pro $k = l = m = 0$.

Příklad 1.1.3 Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ jsou nekomplanární. Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$, $\vec{v} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3$, $\vec{w} = \vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3$, rovněž nekomplanární.

Řešení: Sestavíme rovnici $\alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} + \alpha_3\vec{w} = \vec{o}$. Dosadíme-li do rovnice vyjádření vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, máme

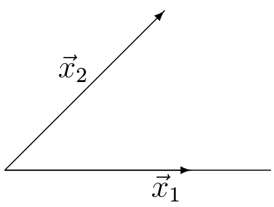
$$\alpha_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3) + \alpha_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3) + \alpha_3(\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3) =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\vec{x}_1 + (\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3)\vec{x}_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\vec{x}_3 = \vec{o}$$

a $c_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, c_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, c_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, protože $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ jsou podle zadání úlohy nekomplanární vektory. Soustava rovnic

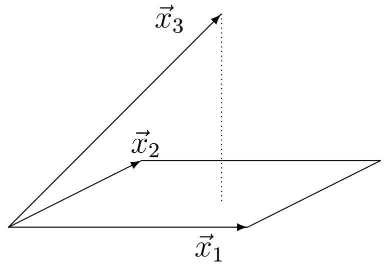
$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0, \alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=0$ má obecné řešení $\alpha_1=-2t, \alpha_2=\alpha_3=t\in\mathbb{R}$. Pro $t\neq 0$, například $t=1$, můžeme vybrat nenulové řešení $\alpha_1=-2, \alpha_2=\alpha_3=1$. Vektory $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}$ jsou proto *komplanární* a platí rovnice $-2\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{o}$. Proto je $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$ lineární kombinací vektorů $\vec{u}\,,\vec{v}$, jak se můžeme přesvědčit provedením zkoušky.

Nekolineární vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$



nelze umístit na jedné přímce.

Nekomplanární vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$



nelze umístit do jedné roviny.

1.2 Součiny vektorů

Skalární součin vektorů

Definice 1.2.1 *Skalárním součinem nenulových vektorů* $\vec{u}\,,\vec{v}\in V(\mathbb{E}_3)$ *rozumíme číslo* (*skalár*)

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}\,||\vec{v}\,|\cos\varphi,}$$

kde $\varphi=\angle(\vec{u}\,,\vec{v}\,)\in\langle 0,\pi\rangle$ *je úhel vektorů* $\vec{u}\,,\vec{v}$ *a* $|\vec{u}\,|, |\vec{v}\,|$ *jsou jejich délky. Je-li alespoň jeden z vektorů nulový, klademe* $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Pro skalární součin platí následující tvrzení:

Věta 3. Je-li $\alpha\in\mathbb{R}$ a $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}\in V(\mathbb{E}_3)$, pak

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$,
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}\,)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$,
3. $(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$,
4. $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0 \quad (\vec{u}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{o})$.

Poznámka: Skalární součin nenulových vektorů lze využít při řešení následujících úloh.

1. *Vyšetřování kolmosti nenulových vektorů*:
   Platí přímo z definice, že $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=0}\Leftrightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$.

2. *Výpočet délky nenulového vektoru*: $\boxed{|\vec{u}\,| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = ||\vec{u}\,||.}$

   Číslo $||\vec{u}\,|| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ se nazývá *euklidovská délka* vektoru $\vec{u}\,$.

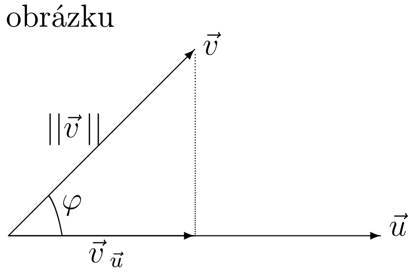
3. *Výpočet úhlu nenulových vektorů*: Přímo ze vzorce obdržíme vztah

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}\,||\cdot||\vec{v}\,||}, \quad \varphi \in \langle 0, \pi\rangle.}$$

4. *Nalezení kolmého průmětu $\vec{v}_{\vec{u}}$ vektoru $\vec{v}$ do vektoru $\vec{u}$*:

$$\boxed{\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}\,||^2}\cdot\vec{u}. \qquad (1.1)}$$

   Z pravoúhlého troúhelníku v obrázku



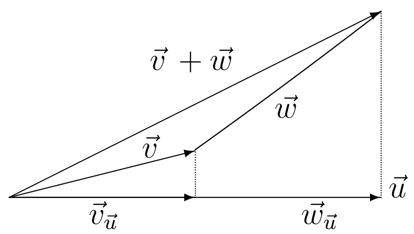
   můžeme pro $\vec{u}_0 = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}\,||}$ psát:

$$\vec{v}_{\vec{u}} = ||\vec{v}\,||\cos\varphi\cdot\vec{u}_0 = ||\vec{v}\,||\cdot\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}\,||\cdot||\vec{v}\,||}\cdot\frac{\vec{u}}{||\vec{u}\,||} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}\,||^2}\cdot\vec{u}.$$

   Všimněte si, že uvedený vztah platí i pro $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, neboť pak $\cos\varphi < 0$ a dojde ke změně orientace jednotkového vektoru $\vec{u}_0$ na opačný vektor.

5. Práce A, kterou vykoná síla $\vec{F}$ stálého směru a velikosti po přímé dráze $\vec{s}$ je dána vztahem $\boxed{A = \vec{F}\cdot\vec{s}.}$

Poznámka: Pomocí kolmých průmětů vektorů se můžeme lehce přesvědčit o vlastnosti 2 ve větě 3.



Platí $(\vec{v}+\vec{w})_{\vec{u}} = \vec{v}_{\vec{u}} + \vec{w}_{\vec{u}}$. Odtud

$(\vec{v}+\vec{w})_{\vec{u}} = ||\vec{v}+\vec{w}||\cos(\vec{v}+\vec{w},\vec{u})\cdot\vec{u}_0 = ||\vec{v}||\cos(\vec{v},\vec{u})\cdot\vec{u}_0 + ||\vec{w}||\cos(\vec{w},\vec{u})\cdot\vec{u}_0.$

Odtud

$$||\vec{v}+\vec{w}||\cos(\vec{v}+\vec{w},\vec{u}) = ||\vec{v}||\cos(\vec{v},\vec{u}) + ||\vec{w}||\cos(\vec{w},\vec{u})$$

a

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}+\vec{w}||\cos(\vec{v}+\vec{w},\vec{u}) =$$
$$= \vec{u}\cdot(||\vec{v}||\cos(\vec{v},\vec{u}) + ||\vec{w}||\cos(\vec{w},\vec{u})) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}.$$

Příklad 1.2.1 Vypočítejte $\vec{u}\cdot\vec{v}$, jestliže $||\vec{u}|| = 4$, $||\vec{v}|| = 5$, $\angle(\vec{u},\vec{v}) = 2\pi/3$.

Řešení:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cos\angle(\vec{u},\vec{v}) = 4\cdot 5\cdot\cos\frac{2\pi}{3} = 4\cdot 5\cdot(-\frac{1}{2}) = -10.$$

Příklad 1.2.2 Vypočítejte $||\vec{a}+\vec{b}||$, jestliže $||\vec{a}|| = 4$, $||\vec{b}|| = 5$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 2\pi/3$.

Řešení: Pomocí Věty 3 určíme, že

$$||\vec{a}+\vec{b}||^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + ||\vec{b}||^2.$$

Proto $||\vec{a}+\vec{b}||^2 = 16 - 20 + 25 = 21$ a $||\vec{a}+\vec{b}|| = \sqrt{21}$ s využitím výsledku předcházejícího příkladu.

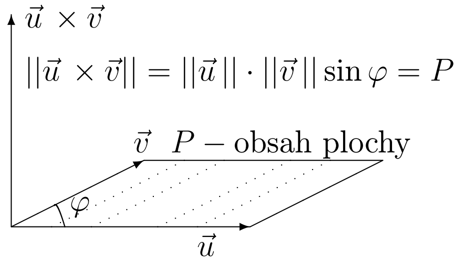
Vektorový součin vektorů

Definice 1.2.2 *Vektorovým součinem vektorů $\vec{u},\vec{v}\in V(\mathbb{E}_3)$ rozumíme vektor označovaný jako $\vec{u}\times\vec{v}$.*
Je-li alespoň jeden z vektorů nulový nebo jsou-li vektory $\vec{u},\vec{v}$ kolineární, klademe $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{o}$.
V opačném případě požadujeme, aby měl vektor $\vec{u}\times\vec{v}$ následující vlastnosti:

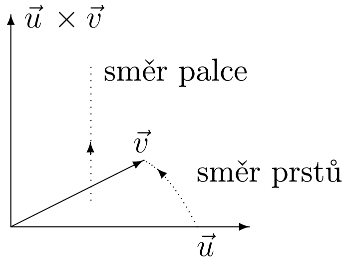
1. *Vektor $\vec{u}\times\vec{v}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{u},\vec{v}$.*
2. *Vektory $\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}$ tvoří v tomto pořadí pozitivní trojici vektorů (platí pravidlo pravé ruky).*
3. *Délka vektoru $\vec{u}\times\vec{v}$ je rovna obsahu plochy sestrojené nad vektory $\vec{u},\vec{v}$, tj.*

   $$\boxed{||\vec{u}\times\vec{v}|| = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\sin\varphi,}$$

   kde $\varphi = \angle(\vec{u},\vec{v})\in\langle 0,\pi\rangle$ je úhel vektorů $\vec{u},\vec{v}$.



Vektorový součin.



Pravidlo pravé ruky pro pořadí $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$.

Pro vektorový součin platí následující tvrzení:

Věta 4. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V(\mathbb{E}_3)$, pak

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$,
2. $\alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \cdot \vec{v})$,
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$,
4. $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$.

Upozornění: Některá pravidla pro násobení reálných čísel u vektorového součinu neplatí!
neplatí: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$ (viz platné pravidlo $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$),
neplatí: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$,
neplatí: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow (\vec{u} = \vec{o}$ nebo $\vec{v} = \vec{o})$.

Poznámka: Vektorový součin nenulových vektorů lze využít při řešení následujících úloh.

1. *Vyšetřování kolinearity nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v}$:*

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \Leftrightarrow (\varphi = 0 \text{ nebo } \varphi = \pi).}$$

2. *Výpočet obsahu plochy sestrojené nad vektory $\vec{u}, \vec{v}$. (Výpočet obsahu trojúhelníku.)*

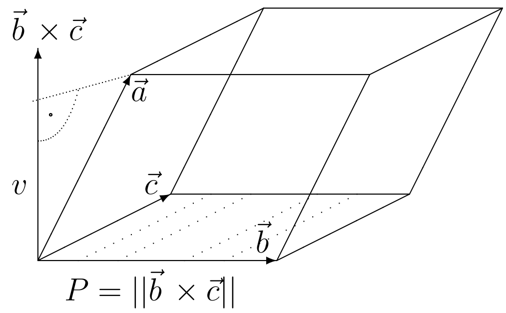
3. *Nalezení vektoru kolmého ke dvěma zadaným nenulovým vektorům.*

Příklad 1.2.3 Vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ mají délky $||\vec{u}\,|| = 1$, $||\vec{v}\,|| = 3$, a svírají úhel $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v}\,) = \pi/4$. Určete obsah trojúhelníku $\triangle ABC$.

Řešení:

$$P_{\triangle} = \frac{1}{2}||\vec{u} \times \vec{v}\,|| = \frac{1}{2}||\vec{u}\,|| \cdot ||\vec{v}\,|| \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

Smíšený součin vektorů



Uvažujme nejprve pozitivní trojici vektorů $\vec{b}\,, \vec{c}\,, \vec{a}$ a rovnoběžnostěn, sestrojený nad těmito vektory. Objem rovnoběžnostěnu je součinem obsahu P základny a výšky v, $V = P \cdot v$. Obsah základny je $P = ||\vec{b} \times \vec{c}||$. Výška je průmět délky vektoru $\vec{a}$ do vektoru $\vec{b} \times \vec{c}$, proto (viz úloha 4. skalárního součinu)

$$v = ||\vec{a}_{\vec{b} \times \vec{c}}|| = ||\vec{a}\,|| \cos(\vec{a}\,, \vec{b} \times \vec{c}\,) = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{||\vec{b} \times \vec{c}||}. \tag{1.2}$$

Objem V rovnoběžnostěnu je proto v tomto případě vyjádřen tzv. *smíšeným součinem*

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

vektorů $\vec{b}\,, \vec{c}\,, \vec{a}\,$.

Přejdeme k obecnému případu.

Definice 1.2.3 *Nechť* $\vec{a}\,, \vec{b}\,, \vec{c} \in V(\mathbb{E}_3)$. *Číslo*

$$[\vec{a}\,, \vec{b}\,, \vec{c}\,] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

nazveme ***smíšeným součinem vektorů*** $\vec{a}\,, \vec{b}\,, \vec{c}$ *(v tomto pořadí).*

Poznámka: Víme, že $\vec{c} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{c}$. Proto

$$[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

Lze ukázat, že vzájemnou výměnou dvou sousedních vektorů ve vzorci pro smíšený součin se změní znaménko smíšeného součinu. Například

$$[\underbrace{\vec{a}, \vec{b}}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \underbrace{\vec{a}, \vec{c}}] = [\underbrace{\vec{b}, \vec{c}}, \vec{a}] = -[\vec{c}, \underbrace{\vec{b}, \vec{a}}] = [\underbrace{\vec{c}, \vec{a}}, \vec{b}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$$

Poznámka: Z geometrického pohledu vidíme, že smíšený součin nenulových vektorů lze využít při řešení následujících úloh.

1. *Výpočet objemu rovnoběžnostěnu setrojeného nad vektory* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V(\mathbb{E}_3)$:

$$\boxed{V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|.}$$

2. *Vyšetřování komplanárnosti vektorů:* Nenulové vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou komplanární právě tehdy, když je

$$\boxed{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0.}$$

3. *Stanovení pozitivnosti trojice vektorů:*

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je pozitivní trojice vektorů, když $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$ (platí pravidlo pravé ruky),

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je negativní trojice vektorů, když $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] < 0$ (neplatí pravidlo pravé ruky),

Příklad 1.2.4 Rovnoběžnostěn je určen vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ a víme, že $||\vec{a}|| = \sqrt{2}$, $||\vec{b}|| = 1$, $||\vec{c}|| = 2$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \pi/4$, vektor $\vec{a}$ svírá se základnou určenou vektory $\vec{b}, \vec{c}$ úhel $\alpha = \pi/6$. Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu.

Řešení: Víme, že $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$. Platí:

$$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b} \times \vec{c}|| \cdot |\cos\angle(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})| = \sqrt{2}||\vec{b} \times \vec{c}|| \cos\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}||\vec{b} \times \vec{c}|| = \frac{\sqrt{2}}{2}||\vec{b}|| \cdot ||\vec{c}|| \sin\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 1.$$

Výsledek příkladu je $V = 1$.

Dvojný vektorový součin vektorů

Jde o vektorový součin trojice vektorů tvaru $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$. Je jasné, že výsledkem je vektor $\vec{d}$, který je kolmý k vektoru $\vec{b}\times\vec{c}$, a je tedy komplanární s dvojicí vektorů $\vec{b},\vec{c}$. Dá se ukázat, že pro koeficienty lineární kombinace vektorů $\vec{b},\vec{c}$ platí:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}. \tag{1.3}$$

Na základě tohoto vztahu lze odvodit další užitečné vztahy pro sférickou trigonometrii.

Uvažujme například nenulové vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$. Pak vektorový součin

$$(\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}_{\vec{e}})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{e}\times(\vec{c}\times\vec{d})\underbrace{=}_{(1.3)}(\vec{e}\cdot\vec{d})\vec{c} - (\vec{e}\cdot\vec{c})\vec{d} = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d},$$

a skalární součin

$$(\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}_{\vec{e}})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{e}\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{c}\cdot(\vec{d}\times\vec{e}) = \vec{c}\cdot(\vec{d}\times(\vec{a}\times\vec{b})) =$$

$$\underbrace{=}_{(1.3)}\vec{c}\cdot((\vec{d}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{d}\cdot\vec{a})\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{d}\cdot\vec{b}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d}).$$

Potřebné vztahy pro sférickou trigonometrii si uvedeme v následujícím odstavci textu.

Důležité identity

Věta 5. Nechť $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V(\mathbb{E}_3)$. Pak platí

(1) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix} = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})$,

(2) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$,

(3) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}$,

(4) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\cdot[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{u} & \vec{a}\cdot\vec{v} & \vec{a}\cdot\vec{w} \\ \vec{b}\cdot\vec{u} & \vec{b}\cdot\vec{v} & \vec{b}\cdot\vec{w} \\ \vec{c}\cdot\vec{u} & \vec{c}\cdot\vec{v} & \vec{c}\cdot\vec{w} \end{vmatrix}$.

Zajímavost: V identitě (1) položme $\vec{a}=\vec{c}=\vec{u}$, $\vec{b}=\vec{d}=\vec{v}$. Pak

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = (\vec{u}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{v}) - (\vec{v}\cdot\vec{u})(\vec{u}\cdot\vec{v}),\ \text{tj.}$$

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}\,||^2||\vec{v}\,||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \geq 0.$$

Odtud ihned plyne známá *Cauchyova identita*:

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq ||\vec{u}\,||^2||\vec{v}\,||^2.$$

Jiný způsob odvození plyne z definice skalárního součinu $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}\,|| \cdot ||\vec{v}\,|| \cos\varphi$ a vlastnosti vektorového součinu $||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}\,|| \cdot ||\vec{v}\,|| \sin\varphi$, protože pak

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = ||\vec{u}\,||^2||\vec{v}\,||^2 \cos^2\varphi,$$

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}\,||^2||\vec{v}\,||^2 \sin^2\varphi$$

a součtem opět

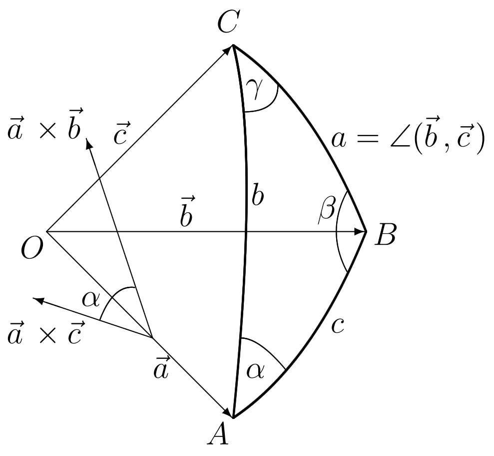
$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + ||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}\,||^2||\vec{v}\,||^2,$$

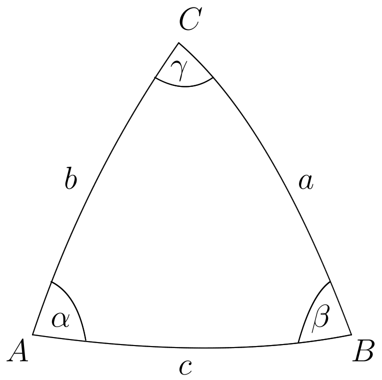
tj.

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}\,||^2||\vec{v}\,||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \geq 0.)$$

1.3 Aplikace vektorového počtu ve sférické trigonometrii

Sférický trojúhelník (schematicky na obrázcích).





$\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
$\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{c} \perp \vec{c}$

V prostoru $\mathbb{E}_3$ zvolme body O, A, B, C tak, aby vektory $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ byly *nekomplanární* a *jednotkové*, tj. $||\vec{a}\,|| = ||\vec{b}\,|| = ||\vec{c}\,|| = 1$.
Opíšeme-li ze středu O jednotkovou kouli, pak body A, B, C leží na kulové ploše poloměru jedna a tvoří vrcholy sférického trojúhelníku.
Rovina procházející body O, A, B protne kulovou plochu v tzv. *hlavní kružnici*

a kratší část hlavní kružnice mezi body A, B vytvoří stranu c sférického trojúhelníku. Podobným způsobem vytvoříme strany a, b sférického trojúhelníku.
Úhel mezi stranami b, c při vrcholu A sférického trojúhelníku označíme α. Podobně značí β, γ úhly při vrcholech B, C. Tyto úhly tvoří *odchylky stěn* trojbokého jehlanu určeného body O, A, B, C.

Základními prvky sférického trojúhelníku rozumíme vrcholy A, B, C , strany a, b, c a úhly α, β, γ sférického trojúhelníku.

Mezi prvky sférického trojúhelníku platí následující vztahy:

(5)	$a = \angle(\vec{b}, \vec{c})$	$b = \angle(\vec{c}, \vec{a})$	$c = \angle(\vec{a}, \vec{b})$
(6)	$\alpha = \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c})$	$\beta = \angle(\vec{b} \times \vec{c}, \vec{b} \times \vec{a})$	$\gamma = \angle(\vec{c} \times \vec{a}, \vec{c} \times \vec{b})$
(7)	$\cos a = \vec{b} \cdot \vec{c}$	$\cos b = \vec{c} \cdot \vec{a}$	$\cos c = \vec{a} \cdot \vec{b}$
(8)	$\sin a = \|\|\vec{b} \times \vec{c}\|\|$	$\sin b = \|\|\vec{c} \times \vec{a}\|\|$	$\sin c = \|\|\vec{a} \times \vec{b}\|\|$
(9)	$\cos \alpha = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c})}{\|\|\vec{a} \times \vec{b}\|\| \cdot \|\|\vec{a} \times \vec{c}\|\|}$	$\cos \beta = \frac{(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{a})}{\|\|\vec{b} \times \vec{c}\|\| \cdot \|\|\vec{b} \times \vec{a}\|\|}$	$\cos \gamma = \frac{(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{c} \times \vec{b})}{\|\|\vec{c} \times \vec{a}\|\| \cdot \|\|\vec{c} \times \vec{b}\|\|}$

Vzorce (5), (6) jsou patrné ze schematického znázornění na předcházejícím obrázku vlevo. Protože $||\vec{a}|| = ||\vec{b}|| = ||\vec{c}|| = 1$, zjednoduší se vzorce pro skalární i vektorový součin. Například platí

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos c,$$

$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \sin c.$$

Takto obdržíme snadno pomocí vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ všechny vztahy (7) a (8). Vzorce (9) jsou důsledkem (6) a vzorce pro vyjádření úhlu vektorů pomocí skalárního součinu vektorů.

Sinová věta pro sférický trojúhelník

Použijeme vzorec (3) Věty 5:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\vec{d}.$$

Vektory $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ jsou vektory naší konstrukce. Vzorec obsahuje vektor $\vec{d}$, který můžeme volit libovolně.

Položme nejprve ve vzorci $\vec{d} = \vec{a}\,.$ Získáme

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\underbrace{\vec{c}\times\vec{a}}_{=-\vec{a}\times\vec{c}}) = \underbrace{[\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{a}\,]}_{=0}\,\vec{c} - [\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}\,]\vec{a}$$

a úpravou

$$[\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}\,]\vec{a} = (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c}).$$

V euklidovské normě pak $||[\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}\,]\vec{a}\,|| = |[\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}\,]|\cdot\underbrace{||\vec{a}\,||}_{=1} = ||(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})||\underbrace{=}_{6}$

$= ||\vec{a}\times\vec{b}||\cdot||\vec{a}\times\vec{c}||\cdot\sin\alpha\underbrace{=}_{(8)}\sin c\cdot\sin b\cdot\sin\alpha$ s výsledkem

$$|[\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}\,]| = \sin c\cdot\sin b\cdot\sin\alpha. \tag{1.4}$$

Podobným způsobem lze pokračovat volbami $\vec{d} = \vec{b}$ a $\vec{d} = \vec{c}$ a ukázat, že můžeme zvolit cestu *cyklické záměny* :

$$\begin{aligned}&\vec{a}\longrightarrow\vec{b}\longrightarrow\vec{c}\longrightarrow\vec{a}\,,\\ &a\longrightarrow b\longrightarrow c\longrightarrow a,\\ &\alpha\longrightarrow\beta\longrightarrow\gamma\longrightarrow\alpha.\end{aligned}$$

Ve vzorci, se kterým budeme pracovat, postupně nahrazujeme objekty (vektory, úhly, strany) těmi objekty, na které ukazuje šipka. Vzorec (1.4) má tvar
$|[\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}\,]| = \sin c\cdot\sin b\cdot\sin\alpha$. První cyklickou záměnou získáme
$|[\vec{b}\,,\vec{c}\,,\vec{a}\,]| = \sin a\cdot\sin c\cdot\sin\beta$, druhou cyklickou záměnou pak
$|[\vec{c}\,,\vec{a}\,,\vec{b}\,]| = \sin b\cdot\sin a\cdot\sin\gamma$. (Další cyklická záměna by zopakovala vzorec (1.4).)
Výměnou pořadí vektorů ve smíšeném součinu se nejvýše mění znaménko a s ohledem na absolutní hodnotu smíšeného součinu jsou čísla na levé straně všech tří získaných vzorců stejná. Proto platí rovnosti

$$\sin c\cdot\sin b\cdot\sin\alpha = \sin a\cdot\sin c\cdot\sin\beta = \sin b\cdot\sin a\cdot\sin\gamma, \qquad |\cdot\frac{1}{\sin a\sin b\sin c} \qquad \text{tj.}$$

$$\boxed{(10) \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}}$$

vzhledem k tomu, že $\sin a\sin b\sin c \neq 0$. Tyto poslední získané rovnosti jsou matematickým zápisem **sinové věty** pro sférický trojúhelník. Slovním vyjádřením **sinové věty** je formulace:

Ve sférickém trojúhelníku poměry sinů stran ku sinům protilehlých úhlů jsou si rovny.

První kosinová věta pro sférický trojúhelník

Použijeme vzorec (1) Věty 5: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$. Opět položme ve vzorci $\vec{d} = \vec{a}$. Získáme

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\underbrace{\vec{c} \times \vec{a}}_{-\vec{a} \times \vec{c}}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{a}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{a}}_{||\vec{a}\,||^2=1}).$$

Odtud

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{a}) + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c}),$$

pomocí (7) pak

$$\cos a = \cos b \cos c + ||\vec{a} \times \vec{b}|| \cdot ||\vec{a} \times \vec{c}|| \cdot \cos \alpha.$$

Vzorce (8) vedou k **první kosinové větě** pro stranu a:

(11)	$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$

Cyklickou záměnou $a \to b \to c \to a,\ \alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$ získáme postupně **první kosinové věty** pro zbývající strany b, c :

(12)	$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta,$
(13)	$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$

Poznámka: Je-li $\gamma = \pi/2$, je sférický trojúhelník pravoúhlý a vzorec (13) dává tvar *Pythagorovy věty* pro pravoúhlý sférický trojúhelník:

(14)	$\cos c = \cos a \cos b.$

(Pro "malé" pravoúhlé sférické trojúhelníky pak platí vzorec $c^2 \doteq a^2 + b^2$.)

1.4 Lineární prostor, báze a dimenze

Poznámka: Pojem vektorového zaměření $V(\mathbb{E}_3)$ (včetně jeho vlastností daných Větami 1 a 2) se v matematice zobecňuje na pojem *lineární prostor* nebo též *vektorový prostor*. Geometrické vektory vytvářejí "přirozený model" *lineárního prostoru* a umožňují nám pochopení obsahu tohoto pojmu. Porovnejme v následující definici axiomy I1–I4 (zákony pro sčítání vektorů, existence nulového a opačného vektoru) s obsahem Věty 1 a axiomy II1, II2 (zákony pro násobení vektorů) spolu s III1, III2 (distributivní zákony) s obsahem Věty 2.

Definice 1.4.1 *Množinu $M = \{x, y, z, \ldots\}$ nazveme (reálným)* ***lineárním prostorem****, když*

$$\begin{array}{ll} x, y \in M \Longrightarrow x + y \in M & (\text{na } M \text{ je definováno sčítání prvků}), \\ \alpha \in \mathbb{R}, x \in M \Longrightarrow \alpha x \in M & (\text{na } M \text{ je definováno násobení skalárem } \alpha \in \mathbb{R}), \end{array}$$

pro každé $x, y \in M, \alpha \in \mathbb{R}$ a operace sčítání a násobení skalárem jsou pro každé $x, y, z \in M$ a každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vázány axiomy:

- I1. $x + y = y + x$,
- I2. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- I3. existuje nulový prvek $o \in M$ takový, že $x + o = x$,
- I4. ke každému prvku x existuje opačný prvek $-x$ tak, že platí $x + (-x) = o$,
- II1. $1 \cdot x = x$,
- II2. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
- III1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- III2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Prvky $x, y, z, \ldots$ nazýváme ***vektory****.*

Také pojmy *kolinearity* (nekolinearity) a *komplanarity* (nekomplanarity) se zobecňují v lineárním prostoru na tzv. *lineární závislost* (lineární nezávislost) *vektorů.*

Definice 1.4.2 *Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektory a $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ čísla, pak vektor*

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

nazveme ***lineární kombinací*** *vektorů $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*
Vektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazveme ***lineárně nezávislé****, když*

$$\boxed{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = \vec{o} \Longleftrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0,}$$

tj. žádný z vektorů nelze zapsat jako lineární kombinaci vektorů zbývajících. V opačném případě jsou vektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ***lineárně závislé****.*

Protože máme definován pojem lineární nezávislosti vektorů, můžeme zavést užitečné pojmy *báze* a *dimenze* lineárního prostoru.

Definice 1.4.3 *Vektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tvoří* ***bázi*** *lineárního prostoru M, když jsou lineárně nezávislé a každý další vektor $x \in M$ je již jednoznačnou lineární kombinací vektorů $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tj.*

$$x \in M \Longrightarrow x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \qquad (c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}). \tag{1.5}$$

Počet n vektorů báze se nazývá ***dimenze*** *lineárního prostoru M a koeficienty $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ lineární kombinace (1.5) se nazývají* ***souřadnice vektoru*** *x v uspořádané bázi $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$.*

Příklad 1.4.1 Vektorové zaměření $V(\mathbb{E}_3)$ je lineárním prostorem dimenze tři. Namísto zápisu $M = \{x, y, z, \ldots\}$ používáme zápis $V(\mathbb{E}_3) = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots\}$.

Příklad 1.4.2 Pravidla pro počítání s reálnými čísly nám umožňují ukázat, že množina $M = \mathbb{R}^n$ uspořádaných n–tic s prvky $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ a operacemi sčítání

$$x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

a násobení reálným číslem

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

je tzv. ***aritmetickým lineáním prostorem***, který má dimenzi n. Nulovým prvkem je uspořádaná n–tice $o = (0, 0, \ldots, 0)$ a opačným vektorem k vektoru $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je vektor $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

1.5 Vektory v ortonormální bázi

Nechť $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ je uspořádaná pozitivní soustava vzájemně kolmých ($\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ pro $i \neq j$) a jednotkových ($||\vec{e}_i|| = 1$) vektorů ($i, j \in \{1, 2, 3\}$).

Sestavíme-li pro $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ rovnici

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \vec{o},$$

pak postupné skalární násobení rovnice vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vede k výsledku $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Například násobení vektorem $\vec{e}_1$ dává výsledek

$$\alpha_1 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{||\vec{e}_1||^2=1} + \alpha_2 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_{0} + \alpha_3 \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1}_{0} = \underbrace{\vec{o} \cdot \vec{e}_1}_{0} \Rightarrow \alpha_1 = 0.$$

Vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ jsou proto lineárně nezávislé, tvoří tzv. **ortonormální bázi**

$$\mathbf{E} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$$

prostoru $V(E_3)$ a každý vektor $\vec{x} \in V(E_3)$ je jejich lineární kombinací

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}).$$

Ortonormálních bází je v prostoru $V(\mathbb{E}_3)$ nekonečný počet (liší se od sebe posunutím a otočením soustavy).Vždy uvažujeme jednu konkrétní soustavu, ke které se vztahují souřadnice vektoru $\vec{x} \in V(\mathbb{E}_3)$.

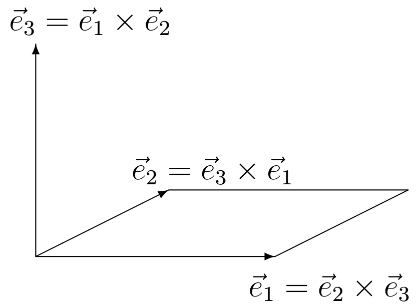
Připomeneme si výsledky pro skalární a vektorové součiny vektorů báze $\mathbf{E}$, vyplývající z dřívějších definic.

Lze vyjádřit skalární součiny:

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \|\|\vec{e}_1\|\|^2 = 1$	$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$	$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0$
$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$	$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \|\|\vec{e}_2\|\|^2 = 1$	$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$
$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0$	$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 = 0$	$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = \|\|\vec{e}_3\|\|^2 = 1$

podle definice ortonormální báze.

Podobně vektorové součiny jsou



$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{o}$	$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$	$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$
$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$	$\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{o}$	$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$
$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$	$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$	$\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{o}$

podle definice vektorového součinu (použijte v obrázku "pravidlo pravé ruky").

Skalární součin v ortonormální bázi

S ohledem na pravidla pro počítání se skalárním součinem (Věta 3) můžeme počítat

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \cdot (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) =$$

$$= a_1b_1 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{1} + a_1b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_{0} + a_1b_3 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3}_{0} +$$

$$+ a_2b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_{0} + a_2b_2 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}_{1} + a_2b_3 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3}_{0} +$$

$$+ a_3b_1 \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1}_{0} + a_3b_2 \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2}_{0} + a_3b_3 \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3}_{1} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Získali jsme vzorec

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

pro vektory $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$, uvažované v ortonormální bázi **E**.

Vektorový součin v ortonormální bázi

Podobným způsobem lze využít Větu 5 pro výpočet vektorového součinu vektorů $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ v ortonormální bázi $\mathbf{E}$. Rozepsání vektorového součinu dává vektor

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = \\ &= a_1b_1 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1}_{\vec{o}} + a_1b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{\vec{e}_3} + a_1b_3 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{-\vec{e}_2} + \\ &+ a_2b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}_{-\vec{e}_3} + a_2b_2 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_2}_{\vec{o}} + a_2b_3 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{\vec{e}_1} + \\ &+ a_3b_1 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{\vec{e}_2} + a_3b_2 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_2}_{-\vec{e}_1} + a_3b_3 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3}_{\vec{o}} = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Tento výsledek můžeme zapsat jako symbolický determinant třetího řádu, který při výpočtu rozvineme podle prvního řádku:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3.}$$

Příklad 1.5.1 Najděte vektor kolmý k vektorům $\vec{a} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

Řešení:

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Řešením úlohy je každý vektor kolineární s vektorem $\vec{d}$.

Smíšený součin v ortonormální bázi

Uvažujeme smíšený součin

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

pro vektory $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$, $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$ v ortonormální bázi $\mathbf{E}$ a víme, že

$$\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c} = \underbrace{(b_2c_3 - b_3c_2)}_{d_1}\vec{e}_1 + \underbrace{(b_3c_1 - b_1c_3)}_{d_2}\vec{e}_2 + \underbrace{(b_1c_2 - b_2c_1)}_{d_3}\vec{e}_3 = d_1\vec{e}_1 + d_2\vec{e}_2 + d_3\vec{e}_3.$$

Skalární součin
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{d}=$$
$$=a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_3-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=$$
$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.$$
Smíšený součin proto můžeme zapsat jako determinant třetího řádu
$$\boxed{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.}$$

Příklad 1.5.2 Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu sestrojeného nad vektory $\vec{a}=\vec{e}_1$, $\vec{b}=\vec{e}_1-3\vec{e}_3$, $\vec{c}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$. Tvoří vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ pozitivní trojici vektorů?

Řešení:
$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3>0.$$
Vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tvoří pozitivní trojici vektorů, protože $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]>0$. Objem rovnoběžnostěnu sestrojeného nad vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ je $|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|=|3|=3$ (jednotky^3).

Příklad 1.5.3 Jsou dány vektory $\vec{a}=\vec{e}_1+\vec{e}_3$, $\vec{b}=\vec{e}_2-\vec{e}_3$, $\vec{c}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$. Vypočítejte $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

a) podle vzorce pro počítání vektorového součinu v souřadnicích báze **E**,

b) pomocí vzorce (2) Věty 5.

Řešení:

a) Nejprve najdeme $\vec{d}=\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_3$. Pak
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\times\vec{d}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3.$$
b) Vzorec má tvar
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$
Skalární součiny
$\vec{a}\cdot\vec{c}=(1\vec{e}_1+0\vec{e}_2+1\vec{e}_3)\cdot(1\vec{e}_1+1\vec{e}_2+0\vec{e}_3)=1\cdot1+0\cdot1+1\cdot0=1$,
$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1\vec{e}_1+0\vec{e}_2+1\vec{e}_3)\cdot(0\vec{e}_1+1\vec{e}_2-1\vec{e}_3)=1\cdot0+0\cdot1+1\cdot(-1)=-1$.
Proto $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}-(-1)\vec{c}=\vec{b}+\vec{c}=\vec{e}_2-\vec{e}_3+\vec{e}_1+\vec{e}_2=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3$.

Kapitola 2

Některé aplikace vektorového počtu

2.1 Vektory v souřadnicové soustavě prostoru $\mathbb{E}_3$

Zvolíme-li v $\mathbb{E}_3$ pevný bod O a uspořádanou pozitivní ortonormální bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ ve $V(\mathbb{E}_3)$, pak dostaneme tzv. ***kartézský souřadnicový systém*** a označíme jej $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$. Bod O nazýváme ***počátkem*** a přímky určené bodem O a postupně vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ nazýváme ***souřadnicovými osami*** x, y, z. Je konvence označovat tuto speciální bázi jako $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ namísto $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$.

S každým bodem A je možné uvažovat polohový vektor (rádiusvektor)

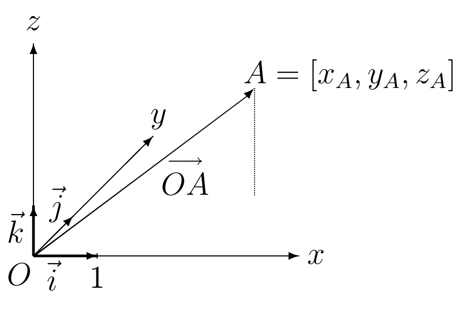
$$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$$

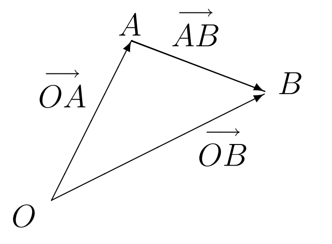
bodu A. Zápis vektoru $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$ budeme zkracovat na tvar

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} = (x_A, y_A, z_A),$$

čísla x_A, y_A, z_A nazveme souřadnicemi bodu A a píšeme $A = [x_A, y_A, z_A]$. Dvěma různými body $A = [x_A, y_A, z_A], B = [x_B, y_B, z_B]$ je pak určen vektor

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$





2.2 Rovina v $\mathbb{E}_3$

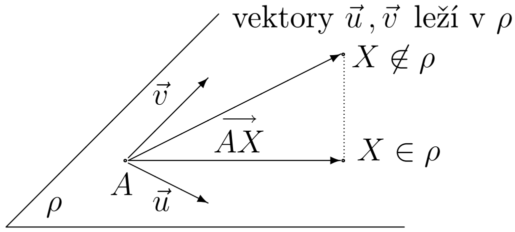
Skutečnost, že rovina ρ je v prostoru $\mathbb{E}_3$ určena bodem $A = [x_A, y_A, z_A] \in \rho$ a dvěma nekolineárními vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ležícími v rovině ρ budeme zapisovat

$$\rho = [A; \vec{u}, \vec{v}].$$

Můžeme použít několik různých přístupů k popisu roviny (stanovení podmínky, za které je obecný bod $X = [x, y, z]$ bodem roviny ρ). Uvedeme dva z takových přístupů.

. . . .

Libovolný bod $X = [x, y, x] \in \rho$ právě, když vektory $\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ jsou komplanární.



To lze vyjádřit dvěma způsoby:

1. $\overrightarrow{AX} = t\vec{u} + s\vec{v}$ ($t, s \in \mathbb{R}$ jsou parametry) jsou ***parametrické rovnice roviny*** ρ, které rozepisujeme do souřadnic

$$\begin{aligned} x &= x_A + tu_1 + sv_1, \\ y &= y_A + tu_2 + sv_2, \\ z &= z_A + tu_3 + sv_3. \end{aligned}$$

   Z těchto rovnic umíme vyčíst souřadnice bodu $A \in \rho$ i vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ roviny ρ.

2. Pro komplanární vektory je smíšený součin $[\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$. Proto

$$[\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

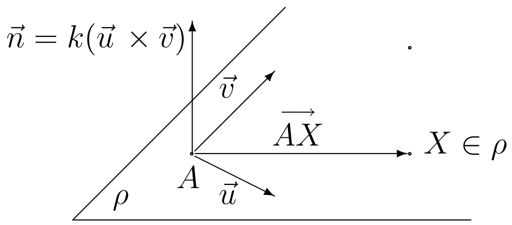
$$= (x - x_A) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2) - (y - y_A) \cdot (u_1 v_3 - u_3 v_1) + (z - z_A) \cdot (u_1 v_2 - u_2 v_1) =$$

$$= \underline{ax + by + cz + d = 0}$$

   a výsledkem je **obecná rovnice roviny** ρ.

. . . .

Vektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \neq \vec{o}$ kolmý k rovině ρ se nazývá ***normálový vektor*** *roviny ρ.* Z vlastností vektorového součinu víme, že vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý ke každému z vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ ležících v rovině ρ, proto je kolmý k rovině ρ. Je zřejmé, že za normálový vektor roviny můžeme volit libovolný nenulový vektor kolineární s vektorem $\vec{u} \times \vec{v}$.



Libovolný bod $X = [x, y, x] \in \rho$ právě, když vektory $\overrightarrow{AX}, \vec{n}$ jsou kolmé.

Podmínku kolmosti vektorů vyjadřuje skalární součin

$$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = (x - x_A, y - y_A, z - z_A) \cdot (n_1, n_2, n_3) =$$

$$= n_1 x + n_2 y + n_3 z - (n_1 x_A + n_2 y_A + n_3 z_A) = ax + by + cz + d = 0.$$

Vidíme, že koeficienty a, b, c obecného tvaru rovnice roviny ρ jsou souřadnice normálového vektoru roviny ρ, tj.

$$\vec{n} = (a, b, c),$$

kde vektor $\vec{n}$ je kolineární s vektorem $\vec{u} \times \vec{v}$.

. . . .

Příklad 2.2.1 Rovina ρ má obecnou rovnici roviny $x + 2z + 1 = 0$. Najděte bod A a normálový vektor roviny ρ.

Řešení: Obecná rovnice roviny ρ má tvar $ax + by + cz + d = 0$, kde normálový vektor $\vec{n} = (a, b, c)$. Zadání úlohy proto napíšeme ve tvaru $1x + 0y + 2z + 1 = 0$ a proto $\vec{n} = (1, 0, 2)$. Bodem roviny je libovolný bod $A = [x_A, y_A, z_A]$, který splňuje rovnici $x_A + 2z_A + 1 = 0$. Protože rovnice nezávisí na y, lze volit pro jednoduchost $y_A = 0$ a například volbou $x_A = -1$ získáme z rovnice $z_A = 0$. Bod $A = [-1, 0, 0] \in \rho$.

Poznámka: Rovnice roviny $x + 2z + 1 = 0$ posledního příkladu nezávisí na y, pro každé y je rovnice stejná, proto je rovina rovnoběžná se souřadnicovou osou y. To je vidět také na normálovém vektoru $\vec{n} = (1, 0, 2)$, který má druhou souřadnici nulovou (situaci graficky znázorněte). Podobně rovnice $x = 3$ je v $\mathbb{E}_3$ obecnou rovnicí roviny, která je rovnoběžná se souřadnicovými osami y i z.

Příklad 2.2.2 Body $A = [1, 1, 1]$, $B = [0, 1, 2]$, $C = [-2, 3, -1]$ jsou body roviny ρ. Najděte obecnou rovnici roviny ρ

a) Užitím vektorového součinu vektorů.

b) Užitím smíšeného součinu vektorů.

Řešení: Rovina $\rho = [A; \vec{u}, \vec{v}]$, kde $A = [1, 1, 1]$ a vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1, 0, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-3, 2, -2)$ jsou nekomplanární.

a) Vektor $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k} = (-2, -5, -2)$ je kolineární s normálovým vektorem roviny. Proto můžeme zvolit například $\vec{n} = (a, b, c) = (2, 5, 2)$. Bod

$$A = [1, 1, 1] \in \rho : 2x + 5y + 2z + d = 0.$$

Proto je $d = -9$ a hledaná rovnice je $\rho : 2x + 5y + 2z - 9 = 0$.

b) Vektory $\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ jsou pro body $X \in \rho$ komplanární. Proto smíšený součin $[\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2(x-1) - 5(y-1) - 2(z-1) = 0.$$

Úpravou získané rovnice obdržíme výsledek $\rho : 2x + 5y + 2z - 9 = 0$.

Cvičení 2.2.1 Ukažte, že $3x + 6y + 2z - 13 = 0$ je obecnou rovnicí roviny, která vytíná na souřadnicových osách úseky v poměru $2 : 1 : 3$ a prochází bodem $A = [1, 2, -1]$. Jaké jsou délky úseků na osách?

Návod: Situaci si graficky znázorněte. Průsečíky hledané roviny se souřadnicovými osami jsou body $A = [2q, 0, 0]$, $B = [0, q, 0]$, $C = [0, 0, 3q]$, kde $|q| \neq 0$ je délka úseku. Rovina je proto určena například bodem A a vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Jedním z výpočetních postupů předcházejícího příkladu obdržíme požadovaný výsledek.

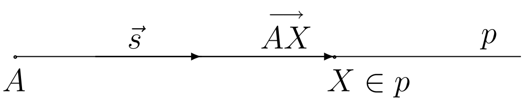
2.3 Přímka v $\mathbb{E}_3$

Skutečnost, že přímka p je v prostoru $\mathbb{E}_3$ určena bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ budeme zapisovat

$$p = [A; \vec{s}].$$

Obecný bod $X = [x, y, z]$ je bodem přímky p právě, když jsou vektory $\vec{s}, \overrightarrow{AX}$ kolineární, tj.

$$\overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{s} \quad (t \in \mathbb{R}).$$



Rozepsáním této vektorové rovnice a úpravou složek získáváme **parametrické rovnice** přímky p,

$$p : x = x_A + ts_1, \;\; y = y_A + ts_2, \;\; z = z_A + ts_3, \quad (t \in \mathbb{R} \text{ je parametr}).$$

Zcela formálně můžeme v každé z parametrických rovnic vyjádřit parametr t a obdržíme **kanonické rovnice** přímky p ve tvaru

$$p : \frac{x - x_A}{s_1} = \frac{y - y_A}{s_2} = \frac{z - z_A}{s_3} \; (= t).$$

Výrazy zápisu přitom nebudeme považovat za zlomky, i když tak formálně vypadají. Úkolem zápisu je především podat informaci o souřadnicích bodu A a směrového vektoru $\vec{s}$, proto bude mít například smysl i zápis

$$p : \frac{x}{0} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2}{-3}$$

vyjadřující skutečnost, že přímka p je určena bodem $A = [0, 1, 2]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (0, 1, -3)$.

Často je **přímka** zadána **jako průsečnice dvou rovin**,

$$p : \left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array} \right. ,$$

které nejsou rovnoběžné nebo totožné. To je splněno, když normálové vektory $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ rovin nejsou kolineární. Úlohou takového zadání přímky bývá nalezení parametrických rovnic přímky, tj. bodu A a směrového vektoru $\vec{s}$ přímky p. Řešení úlohy je velmi jednoduché: přímka p je obsažena v obou rovinách, proto je směrový vektor přímky kolmý k normálovým vektorům

$\vec{n}_1, \vec{n}_2$. Vektor $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ je kolmý k vektorům $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ a pro nekolineární vektory je nenulový. Proto je $\vec{s}$ kolineární s vektorem $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Bod přímky najdeme jako jedno z nekonečně mnoha řešení soustavy dvou rovnic, které přímku definují. Jinou možností je určení obecného řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{aligned},$$

které závisí na jednom parametru a přímo stanoví parametrické rovnice přímky.

Příklad 2.3.1 Najděte parametrické rovnice přímky

$$p : \begin{cases} 2x - 3y + z - 5 = 0 \\ 3x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}.$$

Řešení:

1. řešení: $\rho_1 : 2x - 3y + z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, -3, 1)$,
$\rho_2 : 3x + y - 2z - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (3, 1, -2)$.

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 11\vec{k} = (5, 7, 11) \neq \vec{o},$$

proto nejsou vektory kolineární, lze položit $\vec{s} = (5, 7, 11)$ a úloha má řešení. Položíme-li například $y = 0$, pak řešíme soustavu rovnic $2x + z - 5 = 0$, $3x - 2z - 4 = 0$ s výsledkem $x = 2, z = 1$. Bod $A = [2, 0, 1] \in p$. Parametrické rovnice přímky jsou

$$p : x = 2 + 5t,\ y = 7t,\ z = 1 + 11t, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2. řešení: Gaussovou eliminační metodou lze upravit rozšířenou matici soustavy na tvar

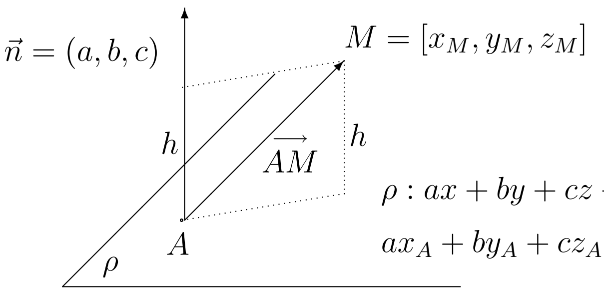
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & -11 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

Volíme například $y = 7t$ ($t \in \mathbb{R}$ je parametr), abychom se vyhnuli počítání se zlomky. Druhá rovnice je proto $-11 \cdot 7t + 7z = 7 \Rightarrow z = 1 + 11t$ a první rovnice po dosazení dává $x = 2 + 5t$. Parametrické rovnice přímky jsou

$$p : x = 2 + 5t,\ y = 7t,\ z = 1 + 11t, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2.4 Úlohy metrické

Vzdálenost bodu od roviny



$$\rho : ax + by + cz + d = 0$$

$$ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \Rightarrow d = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

Vzdálenost bodu $M = [x_M, y_M, z_M]$ od roviny $\rho : ax + by + cz + d = 0$ určené bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$ a normálovým vektorem $\vec{n} = (a, b, c)$ je číslo h, které je průmětem délky vektoru $\overrightarrow{AM}$ do vektoru $\vec{n}$. Proto

$$\boxed{h = || \overrightarrow{AM}_{\vec{n}} || = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{||\vec{n}||}}$$

(viz vzorec (1.1)). Ze střední školy známé vyjádření vzorce obdržíme takto:

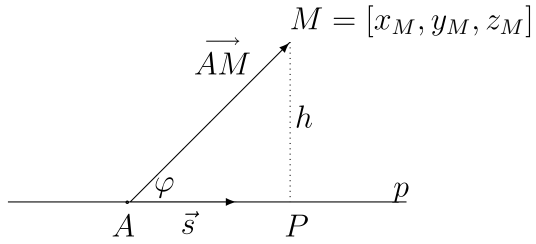
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = (a, b, c) \cdot (x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) =$$

$$= ax_M + by_M + cz_M - (\underbrace{ax_A + by_A + cz_A}_{-d}) = ax_M + by_M + cz_M + d$$

a $||\vec{n}|| = \sqrt{\vec{n} \cdot \vec{n}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Dosazením do výše uvedeného vzorce získáme vyjádření vzdálenosti bodu $M = [x_M, y_M, z_M]$ od roviny $\rho : ax + by + cz + d = 0$ ve tvaru

$$d = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Vzdálenost bodu od přímky



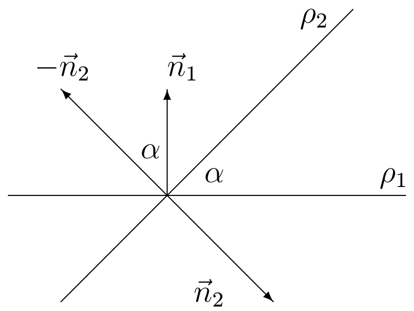
$$h = ||\overrightarrow{AM}||\sin\varphi$$
$$||\overrightarrow{AM}\times\vec{s}|| = ||\overrightarrow{AM}||\cdot||\vec{s}||\sin\varphi$$
$$||\overrightarrow{AM}\times\vec{s}|| = ||\vec{s}||\cdot h$$

Vzdálenost h bodu $M = [x_M, y_M, z_M]$ od přímky $p = [A; \vec{s}]$ je vzdáleností bodu M od kolmého průmětu P bodu M na přímku p. Pomocí vektorového součinu vyjádříme vzdálenost bodu od přímky jako

$$\boxed{h = \frac{||\vec{s}\times\overrightarrow{AM}||}{||\vec{s}||}}$$

(viz obrázek).

Úhel dvou rovin

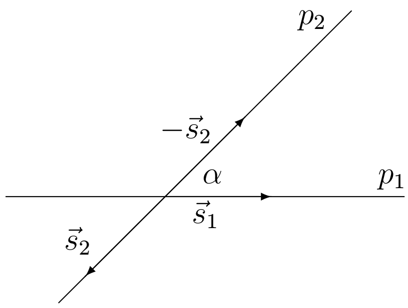


Úhel α rovin ρ_1, ρ_2 vybíráme vždy ostrý. Úhel rovin je úhlem normálových vektorů rovin

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{||\vec{n_1}||\cdot||\vec{n_2}||},}$$

kde uvažujeme v čitateli absolutní hodnotu, abychom ošetřili případ uvedený v obrázku a počítali s ostrým úhlem α.

Úhel dvou přímek

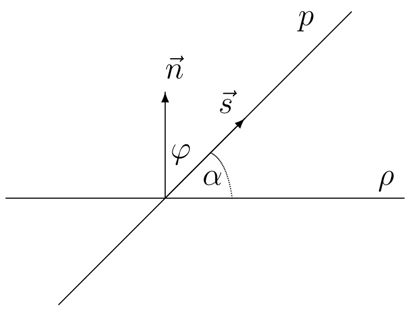


Úhel α přímek p_1, p_2 vybíráme vždy ostrý. Úhel přímek je úhlem směrových vektorů přímek

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{||\vec{s_1}||\cdot||\vec{s_2}||},}$$

kde uvažujeme v čitateli absolutní hodnotu, abychom ošetřili případ uvedený v obrázku a počítali s ostrým úhlem α.

Úhel přímky a roviny



Úhel α přímky p s rovinou vybíráme vždy ostrý. Úhel přímek je doplňkem úhlu φ směrového vektoru přímky a normálového vektoru roviny do $\pi/2$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Víme, že $\vec{n}\cdot\vec{s} = ||\vec{n}||\cdot||\vec{s}||\cos\varphi = ||\vec{n}||\cdot||\vec{s}||\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = ||\vec{n}||\cdot||\vec{s}||\sin\alpha$. Proto v obecném případě klademe

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{||\vec{n}||\cdot||\vec{s}||},}$$

kde uvažujeme v čitateli absolutní hodnotu, abychom počítali s ostrým úhlem α.

2.5 Úlohy polohy

Vzájemná poloha dvou rovin

K rovinám $\rho_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\rho_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ najdeme body $A_1 \in \rho_1$, $A_2 \in \rho_2$ a odpovídající normálové vektory $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

1. Jsou-li vektory $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ kolineární, jsou roviny ρ_1, ρ_2 **rovnoběžné**.
   a) Je-li navíc například $A_1 \in \rho_2$, pak jsou roviny ρ_1, ρ_2 **totožné.**
   b) Jestliže $A_1 \notin \rho_2$, pak jsou roviny ρ_1, ρ_2 **rovnoběžné a různé**. Stanovením vzdálenosti bodu $A_1 \in \rho_1$ od roviny ρ_2 určíme vzdálenost obu rovnoběžných rovin.
2. Jsou-li vektory $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ nekolineární, jsou roviny ρ_1, ρ_2 **různoběžné** a protínají se v jedné přímce p. Stanovujeme pak úhel rovin a nejčastěji parametrické rovnice přímky p.

Vzájemná poloha přímky a roviny

Určíme bod A a normálový vektor $\vec{n}$ roviny ρ, bod B a směrový vektor $\vec{s}$ přímky p. Z geometrických významů obou vektorů vyplývá:

1. Jsou-li vektory $\vec{s}, \vec{n}$ kolmé, je **přímka** p **rovnoběžná s rovinou** ρ.
   a) Je-li $B \in \rho$, pak leží přímka p v rovině ρ.
   b) Jestliže $B \notin \rho$, pak najdeme vzdálenost přímky p od roviny ρ jako vzdálenost bodu B od roviny ρ.
2. Nejsou-li vektory $\vec{s}, \vec{n}$ kolmé, pak přímka p protíná rovinu ρ v průsečíku P přímky s rovinou. Stanovujeme úhel přímky s rovinou a souřadnice průsečíku P.

Průsečík přímky s rovinou

Ať je přímka p určena parametrickými rovnicemi

$$p : x = x_B + ts_1, y = y_B + ts_2, z = z_B + ts_3$$

a rovina ρ obecnou rovnicí roviny

$$\rho : ax + by + cz + d = 0.$$

Přímka $p = [B; \vec{s}]$ má s rovinou $\rho = [A; \vec{n}\,]$ průsečík $P = [x_P, y_P, z_P]$ v případě, že $\vec{s} \cdot \vec{n} \neq 0$. Pak jsou současně splněny rovnice

$$x_P = x_B + t_P s_1, y_P = y_B + t_P s_2, z_P = z_B + t_P s_3, \quad ax_P + by_P + cz_P + d = 0$$

pro hodnotu t_P parametru bodu P. Dosazením nalezeného t_P do výše uvedených rovnic ihned obdržíme souřadnice průsečíku P přímky p s rovinou ρ a identickou rovnici $0 = 0$.

Vzájemná poloha dvou přímek

Nechť $p = [A; \vec{s}_p\,], q = [B; \vec{s}_q\,]$ jsou dvě přímky učené odpovídajícími body a směrovými vektory.

1. Jsou-li vektory $\vec{s}_p, \vec{s}_q$ kolineární, jsou **přímky** p, q **rovnoběžné**.
   a) Je-li například $A \in q$, pak jsou přímky p, q **totožné** ($p \equiv q$).
   b) Je-li například $A \notin q$, pak jsou přímky p, q **rovnoběžné, různé**. Vzdálenost bodu A od přímky q (bodu B od přímky p) určuje vzdálenost rovnoběžek.
2. Jsou-li vektory $\vec{s}_p, \vec{s}_q$ nekolineární, jsou **přímky** p, q **různoběžné** nebo **mimoběžné**. Body A, B určují vektor $\overrightarrow{AB} \in V(\mathbb{E}_3)$.
   a) Je-li smíšený součin $[\vec{s}_p, \vec{s}_q, \overrightarrow{AB}\,] = 0$, leží přímky p, q v jedné rovině a přímky jsou **různoběžné**. Určujeme úhel přímek, průsečík přímek a rovinu, ve které různoběžky leží.
   b) Je-li smíšený součin $[\vec{s}_p, \vec{s}_q, \overrightarrow{AB}\,] \neq 0$, jsou p, q přímky **mimoběžné**. Určujeme úhel mimoběžek a jejich nejkratší vzdálenost.

Průsečík různoběžek

Označme $\vec{s}_p = (s_1, s_2, s_3), \vec{s}_q = (u_1, u_2, u_3)$. Pro průsečík $P = [x_P, y_P, z_P]$ různoběžek platí s využitím parametrických rovnic podmínky

$$\begin{aligned} x_P &= x_A + t_P s_1 = x_B + \tau_P u_1 \\ y_P &= y_A + t_P s_2 = y_B + \tau_P u_2 \\ z_P &= z_A + t_P s_3 = z_B + \tau_P u_3 \end{aligned} \quad ,$$

kde neznámé t_P, τ_P jsou hodnoty parametrů bodu P v odpovídajících parametrických rovnicích. Jedná se o soustavu tří rovnic pro dvě neznámé t_P, τ_P, která má v případě různoběžek právě jedno řešení. Toto řešení určuje po dosazení do výše uvedených rovnic souřadnice hledaného bodu P.

Nejkratší vzdálenost mimoběžek

Nejkratší vzdálenost mimoběžek $p = [A; \vec{s}_p], q = [B; \vec{s}_q]$ je určena výškou (viz (1.2))

$$v = \frac{|[\vec{s}_p, \vec{s}_q, \overrightarrow{AB}]|}{||\vec{s}_p \times \vec{s}_q||}$$

rovnoběžnostěnu sestrojeného nad vektory $\vec{s}_p, \vec{s}_q, \overrightarrow{AB}$.

Příklad 2.5.1 Vyšetřete vzájemnou polohu přímek

$$p : x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2t \ (t \in \mathbb{R}), \quad q : \frac{2x+2}{4} = \frac{4-2y}{4} = \frac{z}{4}.$$

Řešení: $p = [A; \vec{s}_p]$, kde $A = [1, 1, 0], \vec{s}_p = (1, -1, 2)$.
Úpravou zjistíme, že kanonické rovnice

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}$$

přímky q mají tvar

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{4},$$

proto $q = [B; \vec{s}_q]$, kde $B = [-1, 2, 0], \vec{s}_q = (2, -2, 4)$.

Přímky p, q jsou rovnoběžné, protože $\vec{s}_q = (2, -2, 4) = 2(1, -1, 2) = 2\vec{s}_p$ a $\vec{s}_p, \vec{s}_q$ jsou kolineární vektory. K dispozici máme parametrické rovnice přímky p a ptáme se, zda bod $B = [-1, 2, 0] \in q$ vyhovuje rovnicím přímky p, tj. zda platí současně rovnice $-1 = 1 + t, 2 = 1 - t, 0 = 2t$ pro nějakou hodnotu parametru t. Rovnice si odporují, proto $B \notin p$, přímky jsou rovnoběžné a různé. Vzdálenost rovnoběžek je vzdáleností bodu B od přímky p a je dána vzorcem

$$h = \frac{||\vec{s}_p \times \overrightarrow{AB}||}{||\vec{s}_p||}.$$

Vektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1, 2, 0) - (1, 1, 0) = (-2, 1, 0)$ a vektorový součin

$$\vec{s}_p \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} = (-2, 4, -1)$$

má délku $||\vec{s}_p \times \overrightarrow{AB}|| = \sqrt{21}$ a $||\vec{s}_p|| = \sqrt{6}$. Proto mají rovnoběžky vzdálenost $h = \sqrt{21/6} = \sqrt{7/2}$.

Příklad 2.5.2 Vyšetřete vzájemnou polohu přímek

$$p: x = 1 - t, y = 2, z = 2t - 1 \ (t \in \mathbb{R}), \quad q: x = \tau, y = 3 + \tau, z = -3\tau \ (\tau \in \mathbb{R}).$$

Řešení:

$$\begin{aligned} p &= [A; \vec{s}_p], \quad A = [1, 2, -1], \quad \vec{s}_p = (-1, 0, 2), \\ q &= [B; \vec{s}_q], \quad B = [0, 3, 0], \quad \vec{s}_q = (1, 1, -3). \end{aligned}$$

Vektorový součin

$$\vec{s}_p \times \vec{s}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = -(2, 1, 1) \neq 0.$$

Vektory nejsou kolineární, proto se jedná o různoběžky nebo mimoběžky. Vektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0, 3, 0) - (1, 2, -1) = (-1, 1, 1)$ a smíšený součin

$$[\vec{s}_p, \vec{s}_q, \overrightarrow{AB}] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Přímky p, q jsou různoběžné.

Úhel různoběžek určíme pomocí skalárního součinu

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_p \cdot \vec{s}_q|}{||\vec{s}_p|| \cdot ||\vec{s}_q||} = \frac{|-7|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}} = \frac{7}{\sqrt{55}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{7}{\sqrt{55}}.$$

Průsečík P různoběžek najdeme pomocí rovnic

$$\left.\begin{array}{llll} x_P & = 1 - t_P & = \tau_P \\ y_P & = 2 & = 3 + \tau_P \\ z_P & = -1 + 2t_P & = -3\tau_P \end{array}\right| \begin{array}{l} \qquad\qquad \Rightarrow \ t_P = 2 \\ \Rightarrow \ \tau_P = -1 \\ \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \ -1 + 4 = 3 \end{array}$$

Odtud pak $x_P = -1, y_P = 2, z_P = 3$ a hledaný průsečík $P = [-1, 2, 3]$.

Rovina obsahující různoběžky je určena prvky, kterými jsou zadány přímky p, q. Stačí uvažovat $\rho = [A; \vec{s}_p, \vec{s}_q]$. Normálový vektor $\vec{n}$ roviny ρ je kolineární s již nalezeným vektorem $\vec{s}_p \times \vec{s}_q = -(2, 1, 1)$ a stačí zvolit $\vec{n} = (2, 1, 1)$. Bod $X = [x, y, z] \in \rho$ právě, když jsou vektory $\overrightarrow{AX}, \vec{n}$ kolmé. Proto $\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} =$ $= (x - 1, y - 2, z + 1) \cdot (2, 1, 1) = 2(x - 1) + y - 2 + z + 1 = 2x + y + z - 3 = 0$. Nalezená rovina $\rho: 2x + y + z - 3 = 0$ skutečně obsahuje obě přímky, protože postupným dosazením parametrických rovnic přímek do obecné rovnice roviny ρ obdržíme $2(1 - t) + 2 + 2t - 1 - 3 = 0$, $2\tau + 3 + \tau - 3\tau - 3 = 0$, tj. identity $0 = 0$.

Příklad 2.5.3 Vyšetřete vzájemnou polohu přímek

$$p : x = 1 - t, y = 2, z = 2t - 1 \ (t \in \mathbb{R}), \quad q : \begin{cases} x + y - 2z - 3 = 0, \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

Řešení: Pro každou přímku určíme bod a směrový vektor přímky. Začneme přímkou q.

$$\begin{aligned} \rho_1 : &\quad x + y + 2z - 3 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_1 = (1, 1, -2), \\ \rho_2 : &\quad 2x - y + z = 0 \ \Rightarrow \ \vec{n}_2 = (2, -1, 1). \end{aligned}$$

Vektor $\vec{s}_q$ je kolineární s vektorem

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1, 5, 3).$$

Volíme $\vec{s}_q = (1, 5, 3)$. Pro $z = 0$ má soustava rovnic $x + y = 3, 2x - y = 0$ určující bod přímky q řešení $x = 1, y = 2$ a bod $B = [1, 2, 0] \in q$. Proto

$$\begin{aligned} p &= [A; \vec{s}_p], \quad A = [1, 2, -1], \quad \vec{s}_p = (-1, 0, 2), \\ q &= [B; \vec{s}_q], \quad B = [1, 2, 0], \quad \vec{s}_q = (1, 5, 3). \end{aligned}$$

Vektorový součin

$$\vec{s}_p \times \vec{s}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 5(-2, 1, -1) \neq 0$$

a $||\vec{s}_p \times \vec{s}_q|| = 5||(-2, 1, -1)|| = 5\sqrt{6}$. Přímky nejsou rovnoběžné. Vektor $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 1) = \vec{k}$ a smíšený součin

$$[\vec{s}_p, \vec{s}_q, \overrightarrow{AB}\,] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Proto jsou p, q mimoběžné přímky.

Pro úhel mimoběžek platí

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_p \cdot \vec{s}_q|}{||\vec{s}_p|| \cdot ||\vec{s}_q||} = \frac{5}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Nejkratší vzdálenost mimoběžek je

$$d = \frac{|[\vec{s}_p, \vec{s}_q, \overrightarrow{AB}\,]|}{||\vec{s}_p \times \vec{s}_q||} = \frac{|-5|}{5\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

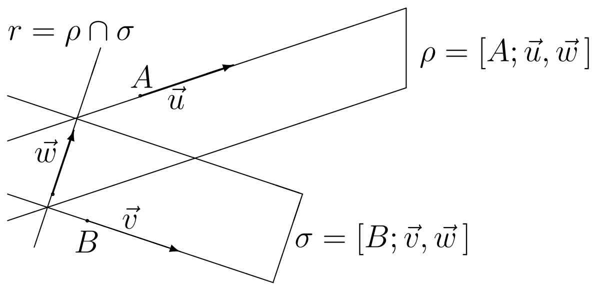
Příčky a osa mimoběžek

Pro mimoběžné přímky $p = [A; \vec{u}\,]$, $q = [B; \vec{v}\,]$, také určujeme

a) ***příčku mimoběžek***, což je přímka r, která je *různoběžná s oběma přímkami* p, q,

b) ***osu mimoběžek***, což je *příčka* r, která je k oběma přímkám p, q *kolmá.*

Máme-li nalézt příčku r mimoběžek p, q, která je *rovnoběžná s vektorem* $\vec{w}$, pro který platí $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\,] \neq 0$, pak stačí například
1) nalézt roviny $\rho = [A; \vec{u}, \vec{w}\,]$, $\sigma = [B; \vec{v}, \vec{w}\,]$,
2) vytvořit průnik $r = \rho \cap \sigma$.



Otázka: Proč musí být vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nekomplanární?

Poznámka:

a) Při hledání příčky r mimoběžek p, q, která prochází zadaným bodem C, lze postupovat obdobně, jako když je zadán vektor $\vec{w}$.

b) Pro směrový vektor $\vec{w}$ osy mimoběžek zřejmě platí $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Příklad 2.5.4 Jsou dány přímky $p: x = 1 + 2t,\ y = 2 + t,\ z = 2 + t,\ t \in \mathbb{R}$, $q: x = 2 + s,\ y = 3,\ z = 4 + 3s,\ s \in \mathbb{R}$. Ověřte, že jde o mimoběžky a určete jejich příčku r víte-li, že má směrový vektor $\vec{w} = (2, 1, -3)$.

Řešení: Přímky $p = [A; \vec{u}\,]$, $q = [B; \vec{v}\,]$, kde $A = [1, 1, 1]$, $\vec{u} = (2, 1, 1)$, $B = [2, 3, 4]$, $\vec{v} = (1, 0, 3)$ a platí

$$[\overrightarrow{AB}\ \vec{u}, \vec{v}\,] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Jde tedy o mimoběžky. Jak víme, osu r můžeme například určit jako průsečnici rovin $\rho = [A; \vec{u}, \vec{w}\,]$ a $\sigma = [B; \vec{v}, \vec{w}\,]$, přičemž

$$\rho: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \sigma: \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud

$$r: \left\{ \begin{array}{r} x - 2y \qquad + \;\; 3 = 0 \\ 3x - 9y - z + 25 = 0 \end{array} \right. .$$

2.6 Vlastní čísla a vlastní vektory

Motivace: Uvažujme v $\mathbb{E}_2$ rovnici

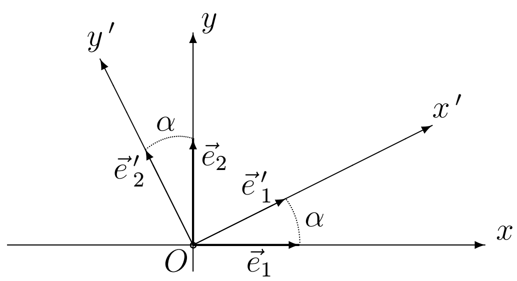
$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0. \tag{2.1}$$

Tentokrát se nám nepodaří určit typ a polohu kuželosečky pouhým "doplněním na úplný čtverec", přebývá zde součin xy. Jde totiž o rovnici kuželosečky, která nemá osy rovnoběžné se souřadnicovými osami. Našim cílem je najít transformaci

$$x = x(x', y'), \quad y = y(x', y'),$$

která vyjádří rovnici kuželosečky vzhledem k jejím osám. Obě metody používané pro řešení této úlohy jsou pro geodety zajímavé.

a) První z nich používá transformaci otáčení s cílem zjistit úhel otočení, při kterém koeficient u $x'y'$ bude nulový. Pro transformaci otáčení platí:



$$\begin{array}{rcl} \vec{e}\,'_1 & = & \vec{e}_1 \cdot \cos\alpha + \vec{e}_2 \cdot \sin\alpha \\ \vec{e}\,'_2 & = & -\vec{e}_1 \cdot \sin\alpha + \vec{e}_2 \cdot \cos\alpha \end{array},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} \vec{e}\,'_1 \\ \vec{e}\,'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{bmatrix}$$

a naopak

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e}\,'_1 \\ \vec{e}\,'_2 \end{bmatrix}$$

Odtud

$$\overrightarrow{OX} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x \cdot (\vec{e}\,'_1 \cos\alpha - \vec{e}\,'_2 \sin\alpha) + y \cdot (\vec{e}\,'_1 \sin\alpha + \vec{e}\,'_2 \cos\alpha) =$$

$$= (\underbrace{x\cos\alpha + y\sin\alpha}_{x'})\vec{e}\,'_1 + (\underbrace{-x\sin\alpha + y\cos\alpha}_{y'})\vec{e}\,'_2$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Dosadíme-li transformační vztahy pro x a y do rovnice kuželosečky, pak například pro (2.1) obdržíme

$$(9\cos^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + 6\sin^2\alpha)x'^2 + \underbrace{(-4\cos^2\alpha - 6\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha)}_{0}x'y' +$$

$$+(9\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 6\cos^2\alpha)y'^2 + (16\cos\alpha - 8\sin\alpha)x' -$$

$$-(16\sin\alpha + 8\cos\alpha)y' - 2 = 0.$$

Položíme-li koeficient u $x'y'$ roven nule, dostaneme goniometrickou rovnici, ze které určíme $\sin\alpha, \cos\alpha$ a tím i transformační rovnice.

Všimněte si zajímavých vlastností matice $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. Platí $\det A = 1,\ A^{-1} = A^T$. Říkáme, že matice A je *ortogonální.*

b) Druhou možností je určit tzv. *hlavní směry kuželosečky.* Zaveďme si nejprve obecné označení koeficientů kuželosečky:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Dá se ukázat, že pro hlavní směry (u_1, u_2) platí

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (a_{11} - \lambda)u_1 + a_{12}u_2 & = & 0 \\ a_{21}u_1 + (a_{22} - \lambda)u_2 & = & 0 \end{array}}$$

a rovnice

$$\begin{array}{rcl} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13} & = & 0 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23} & = & 0 \end{array}$$

splňuje střed $S = [s_1, s_2]$ kuželosečky.

Pro kuželosečku (2.1) tedy platí:

- Hlavní směry kuželosečky jsou určeny netriviálním řešením homogenního systému rovnic
$$\begin{array}{rcl} (9-\lambda)u_1 - 2u_2 & = & 0 \\ -2u_1 + (6-\lambda)u_2 & = & 0 \end{array},$$
pro který musí platit $\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Odtud dostaneme $\lambda = \begin{cases} 5 \\ 10 \end{cases}$.

  Hodnotě $\lambda = 5$ odpovídá systém rovnic
$$\begin{array}{rcl} 4u_1 - 2u_2 & = & 0 \\ -2u_1 + u_2 & = & 0 \end{array},$$
kterému vyhovuje například vektor $\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.
Pro číslo $\lambda = 10$ dostaneme
$$\begin{array}{rcl} u_1 + 2u_2 & = & 0 \\ u_1 + 2u_2 & = & 0 \end{array},$$
a odtud například $\vec{e}\,'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$.

- Střed je určen soustavou
$$\begin{array}{rcl} 9s_1 - 2s_2 + 8 & = & 0 \\ -2s_1 + 6s_2 - 4 & = & 0 \end{array}$$
a tedy $S = [-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}]$.

- V souřadnicové soustavě $\langle S; \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2 \rangle$ pak již má kuželosečka (2.1) požadovaný kanonický tvar.

  V našem motivačním příkladu máme pak
$$\begin{bmatrix} x - s_1 \\ y - s_2 \end{bmatrix} = [\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2] \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$
tj.
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$
Dosazením transformačních vztahů
$$\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - \frac{4}{5} \\ y & = & \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') + \frac{2}{5} \end{array}$$
do rovnice (2.1) dostaneme hledanou rovnici
$$x'^2 + 2y'^2 = 2.$$

Poznámka: Hlavní směry jsou určeny systémem rovnic, kterým definujeme tzv. *vlastní čísla* a *vlastní vektory* matice, které mají rozsáhlé využití jak v matematice, tak v technických aplikacích.

Nejprve uvedeme přehled používané terminologie:

Předpokládáme, že $A \in Mat\ (\mathbb{C})$ je čtvercová matice řádu n, obecně s komplexními prvky.

terminologie – zápis	**význam – název**
$A - \lambda E_n = A - \lambda E$	*charakteristická matice* příslušná k matici$A$, $\lambda \in \mathbb{C}$, E je jednotková matice řádu n
$\det(A - \lambda E)$	*charakteristický polynom* matice A
vlastní čísla matice A	kořeny charakteristického polynomu
spektrum matice A	soubor vlastních čísel matice A, každé vlastní číslo je v něm uvedeno tolikrát, kolik činí jeho násobnost
vlastní vektor matice A příslušný k číslu λ	nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$
vlastní podprostor $V_\lambda(A)$ příslušný k číslu λ	$V_\lambda(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n;\ A\vec{x} = \lambda\vec{x},\ \vec{x} \neq \vec{o}\}$
algebraická násobnost vlastního čísla λ	násobnost kořene λ charakteristického polynomu
geometrická násobnost vlastního čísla λ	dimenze podprostoru $V_\lambda(A)$ ("maximální počet" lineárně nezávislých řešení soustavy $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{o}$)

Poznámka: Maticovou rovnici $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ je možné vyjádřit ve tvaru $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{o}$, kde $\vec{o}$ je nulový vektor. Jak víme, tento *homogenní* systém lineárních algebraických rovnic má netriviální (nenulové) řešení tehdy, když je $\det(A - \lambda E) = 0$.

Všimneme si také, že je-li $\vec{x}$ vlastním vektorem matice A, pak každý konstantní násobek $k\vec{x}$, $k \neq 0$ (obecně $k \in \mathbb{C}$) je opět vlastním vektorem matice A.

Příklad 2.6.1 Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice A, je-li

$$a) \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad\qquad b) \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Řešení

a) Místo přímého výpočtu použijeme nejprve elementární úpravy pro zjednodušení determinantu,

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{r} \longleftarrow \\ \uparrow \\ \cdot(-1) \end{array} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1+\lambda \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{ll} (-3) & (-1) \\ \leftarrow & \quad\downarrow \\ & \longleftarrow \end{array} = (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$= (1-\lambda)(1+\lambda)(2+\lambda) = 0, \quad \Longrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -2$ je spektrum matice A.

Jednotlivým vlastním číslům nyní určíme příslušné vlastní vektory, souřadnice vlastního vektoru označíme x_1, x_2, x_3.

$$* \ \boxed{\lambda_1 = 1} : (A-\lambda_1 E)\vec{x} = \vec{o} \quad \Longrightarrow \begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & -3x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 0 \end{array} \text{ a soustavu}$$

řešíme gaussovou eliminační metodou.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = t$ volíme jako parametr, pak $x_2 = t$, $x_1 = 2t$ a vlastní vektor je $\boxed{\vec{x}_1 = t\cdot(2,1,1)^T.}$

$$* \ \boxed{\lambda_2 = -1} : (A-\lambda_2 E)\vec{x} = \vec{o} \quad \Longrightarrow \begin{array}{rrrcl} 3x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & -1x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_2 = 0$, $x_3 = s$ volíme jako parametr, pak $x_1 = s$ a vlastní vektor je $\boxed{\vec{x}_2 = s\cdot(1,0,1)^T.}$

$$* \ \boxed{\lambda_3 = -2} : (A-\lambda_3 E)\vec{x} = \vec{o} \quad \Longrightarrow \begin{array}{rrrcl} 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & -0x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -0x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = u$ volíme jako parametr, pak $x_2 = -u$ $\;x_1 = u$ a vlastní vektor je $\boxed{\vec{x}_3 = u \cdot (1, -1, 1)^T.}$

Komentář k příkladu $a)$:

- Algebraická i geometrická násobnost každého vlastního čísla je stejná, a to 1.
- Vlastní vektory $(2,1,1)^T$, $(1,0,1)^T$, $(1,-1,1)^T$ jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi aritmetického lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$.

b) Příklad řešíme analogickým postupem,

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 3 \\ -2 & 5-\lambda & 3 \\ 2 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \cdot(1)\uparrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 2 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{c} (-2) \\ \downarrow \\ \longleftarrow \end{array} = (1-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)^2 = 0, \quad \Longrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = 1$$

je spektrum matice A.

$$* \boxed{\lambda_1 = 0} : A\vec{x} = \vec{o} \quad \Longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$ $x_3 = -t$ volíme jako parametr, pak $x_2 = t$, $x_1 = t$ a vlastní vektor je $\boxed{\vec{x}_1 = t \cdot (1, 1, -1)^T.}$

$$* \boxed{\lambda_{2,3} = 1} : (A-E)\vec{x} = \vec{o} \quad \Longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$x_3 = 2s$ volíme jako parametr, $x_2 = u$ volíme jako parametr, pak $x_1 = 3s + 2u$ a vektor

$$\vec{x} = (3s + 2u, u, 2s)^T = s \cdot (3, 0, 2)^T + u \cdot (2, 1, 0)^T$$

je lineární kombinací dvou vlastních vektorů.

Komentář k příkladu $b)$:

- $\dim V_\lambda(A) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad \lambda_1 = 0 \\ 2 & \text{pro} \quad \lambda_{2,3} = 1 \end{cases}$ Algebraická i geometrická násobnost každého vlastního čísla je stejná, a to 1 pro $\lambda = 0$, 2 pro $\lambda = 1$.
- Vlastní vektory $(1, 1, -1)^T$, $(3, 0, 2)^T$, $(2, 1, 0)^T$ jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi aritmetického lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$.

Na závěr uvedeme některé **vlastnosti vlastních čísel a vlastních vektorů** čtvercových matic n–tého řádu.

(a) Vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.

(b) Jestliže pro každé vlastní číslo se jeho algebraická násobnost rovná geometrické násobnosti, pak existuje právě n lineárně nezávislých vlastních vektorů matice A.

(c) Všechna vlastní čísla reálné symetrické matice ($A^T = A$) jsou reálná.

(d) Vlastní vektory reálné symetrické matice vzhledem k různým vlastním číslům jsou ortogonální.

Poznámka: O správnosti (a) se můžeme přesvědčit například takto. Předpokládejme, že že $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou vlastní čísla matice A a přitom jim odpovídající vlastní vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ jsou lineárně závislé. Pak existuje konstanta $k \neq 0$ taková, že $\vec{v}_2 = k\vec{v}_1$. Dále platí $A\vec{v}_2 = Ak\vec{v}_1 = kA\vec{v}_1 = k\lambda_1\vec{v}_1$ a současně $A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2 = \lambda_2 k\vec{v}_1$. Odtud $k\lambda_1\vec{v}_1 = \lambda_2 k\vec{v}_1$ a tedy $k(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{v}_1 = \vec{o}$. Protože $\vec{v}_1 \neq \vec{o}$ a $k \neq 0$, musí platit $\lambda_1 = \lambda_2$. To je spor s předpokladem a vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ jsou proto lineárně nezávislé.

Test

Jméno a příjmení: ____

Adresa: ____

E-mail: ____________________

Telefon: ____________________

1. Jsou dány nekomplanární vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, přičemž $||\vec{u}\,|| = ||\vec{v}\,|| = 1$, $||\vec{w}\,|| = 2$, $\angle(\vec{u}, \vec{v}\,) = 90^o$, $\angle(\vec{u}, \vec{w}\,) = \angle(\vec{v}, \vec{w}\,) = 60^o$. Vypočítejte plošný obsah rovnoběžníku sestrojeného z vektorů $\vec{a} = -\vec{u} + 2\vec{w}$, $\vec{b} = 2\vec{u} - \vec{v}$.

2. Dokažte, že platí

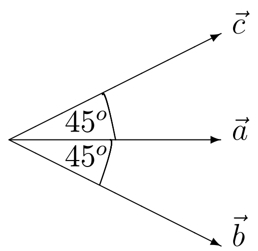
$$(\vec{b} \times \vec{c}\,) \cdot \Big[(\vec{c} \times \vec{a}\,) \times (\vec{a} \times \vec{b}\,)\Big] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\,]^2.$$

3. Výpočtem zjistěte zda platí

a) $(\vec{a} \cdot \vec{b}\,)\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}\,)$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}\,) \times c = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\,)$

pro vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, které jsou komplanární a svírají úhly (viz obrázek).



4. Je dána přímka $p : \left\{ \begin{array}{r} 2x + 2y - 3z = 0 \\ x - 3y - 2z + 5 = 0 \end{array} \right.$, rovina $\rho : 3x + y + 2z + 3 = 0$ a bod $A = [1; 2; 3]$. Určete

a) kanonický tvar rovnice kolmého průmětu q přímky p do roviny ρ,

b) úhel přímky p a rovinou ρ,

c) bod B souměrně sdružený s bodem A vzhledem k rovině ρ.

Tabulka hodnocení

1.	2.	3. a	3. b	4. a	4. b	4. c	Σ
							body

Opravil:

Ukázka příkladů pro semestrální zkoušku

1. Jsou dány vektory $\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}$, $\vec{b} = \vec{v} - \vec{w}$, $\vec{c} = \vec{u} + 2\vec{v}$, kde uspořádaná trojice $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ tvoří pozitivní soustavu nekomplanárních vektorů ve $V(\mathbb{E}_3)$. Přitom $||\vec{u}|| = 1$, $||\vec{v}|| = 2$, $||\vec{w}|| = 2$, $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 60^o$, $\angle(\vec{u}, \vec{w}) = 60^o$, $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 90^o$. Zjistěte

a) zda uspořádaná trojice $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ vektorů je pozitivní,

b) plošný obsah rovnoběžníku $ABCD$, jestliže $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

2. Jsou dány přímky $p : \left\{ \begin{array}{r} x - y + z - 2 = 0 \\ 3x - y - z - 2 = 0 \end{array} \right.$, $q : \left\{ \begin{array}{r} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array} \right.$. Zjistěte, zda jde o mimoběžné přímky a pokud ano, tak

a) určete parametrický tvar rovnice osy mimoběžek,

b) vypočtěte (nejkratší) vzdálenost přímek p, q.

3. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{bmatrix}$.

Rejstřík

Literatura

[1] Anton H., *Calculus with Analytic Geometry*, John Wiley, 1995, New York.

[2] Budinský B., *Analytická a diferenciální geometrie*, SNTL, Praha 1983.

[3] Ježek F., Míková M., *Maticová algebra a analytická geometrie*, 2003, ZČU Plzeň.